

Helmut Fischler(Hrsg.)

# Quantenphysik in der Schule

Kiel: IPN 1992

Darin:

Niedderer, H.

Atomphysik mit anschaulichen Quantenmodell

Seiten 88-113

# Atomphysik mit anschaulichem Quantenmodell

## 1. Einleitung

Das Thema Quantenphysik in der Sekundarstufe 2 wird in unserer Gruppe seit einigen Jahren bearbeitet (vgl. die Arbeiten von Niedderer, Bayer, Bethge, Bormann, Cassens und Schecker im Literaturverzeichnis). Wichtige Anregungen bei der Entwicklung der im folgenden beschriebenen didaktischen Konzeption stammen aus den Arbeiten von SCHREINER (1978), KOPPELMANN et al. (1981) und ECKHARDT (1982).<sup>1</sup> Unsere empirischen Arbeiten wurden 1988 mit einer Dissertation vorläufig abgeschlossen (vgl. den Beitrag von Bethge in diesem Band). Die Entwicklung eines didaktischen Konzepts wird zur Zeit in Richtung auf Erschließung neuer einfacher Anwendungen in Physik und Chemie fortgesetzt (vgl. den Beitrag von Cassens in diesem Band).

In dem folgenden Beitrag sollen der fachdidaktische Ansatz zusammenfassend dargestellt und einige neuere Materialien (Experimente und Computersimulationen) im Bereich der stehenden mechanischen Wellen und zum H-Atom mitgeteilt werden.

## 2. Didaktische Leitideen

Die Kernpunkte der didaktischen Konzeption, in denen sie sich teilweise auch von anderen Konzepten unterscheidet (z.B. FISCHLER 1989, BERG et al. 1989), bestehen in folgenden Leitideen:

### *(1) Von Bohr zu Schrödinger*

Im Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe wird immer noch überwiegend das Bohrsche Atommodell in den Kursen zur Atomphysik zugrundegelegt. Demgegenüber wird in unserer Konzeption das Bohrsche Modell nur so weit berücksichtigt, wie es in einem schülerorientierten Unterricht von Schülern selbst eingebracht wird (vgl. Niedderer 1991). Das eigentliche Ziel des Kurses ist ein Atommodell nach Schrödinger, in dem die Existenz von **Zuständen** mit diskreten Energieniveaus eine natürlich Begründung findet und welches dem heutigen Stand der Physik wesentlich näher steht.

---

<sup>1</sup> Ähnliche Ansätze finden sich auch in den Schulbüchern DORN/BADER und GROSS BERHAG

## (2) Reduzierung des mathematischen Aufwandes

Wir benutzen die Analogie der **stehenden Welle**, um das grundlegende Konzept des **Zustandes** ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{W}_n$ ,  $\psi_n$ ) schon bei klassischen stehenden Wellen einzuführen. Darauf aufbauend wird die Schrödingergleichung in elementarisierter Form als Aussage über die Steigungsänderung bzw. Krümmung der  $\psi$ -Funktion benutzt, die dazu dienen kann, die  $\psi$ -Funktion zu verstehen oder zu konstruieren (z.B. mit dem Computer). Die Abhängigkeit dieser Krümmung von den wesentlichen Parametern Gesamtenergie  $\mathbf{W}_n$ , Potential  $\mathbf{W}_{\text{pot}}(x)$  an der Stelle  $x$  und dem Funktionswert  $\psi$  selbst wird in der folgenden halbquantitativen Form der stationären Schrödinger-Gleichung zusammengefaßt:

$$\psi'' \sim - (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}_{\text{pot}}) * \psi$$

Der **Computer** wird dabei in mehrfacher Hinsicht zum wertvollen Hilfsmittel:

- Zur Veranschaulichung der Bedeutung von  $\psi''$ ,
- zur Demonstration der Bedeutung von Randbedingungen,
- zur Erarbeitung der Begriffe "Zustand", "Eigenwert" und "Amplitudenfunktion" schon bei mechanischen stehenden Wellen und
- zur konkreten Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen.

## (3) Erschließung von Anwendungen

Unser primäres Ziel ist weniger eine Vertiefung der Interpretationsdiskussion und ihrer philosophischen Probleme, unsere Konzeption ist mehr auf die Erschließung von Anwendungen unseres Quantenmodells auf Phänomene der Atomphysik, der Chemie und der Festkörperphysik gerichtet. Wir machen dabei bewußt und häufig Gebrauch von Analogien zu klassischen Phänomenen (insbesondere der stehenden Wellen) und betonen weniger "einen ganz neuen Typ des Denkens" in der Quantenphysik.

## (4) Schülerorientierung

Begriffsbildung und Lernprozesse der Schüler sollen durch schülerorientierte Phasen zu Beginn eines jeden neuen Kapitels besonders gefördert werden ("am Schülervorverständnis orientierter Unterricht - SVU", Niedderer, Schecker 1982). Solche schülerorientierten Unterrichtsphasen wurden am Thema Photoeffekt, Quantenvorstellung des Elektrons und Einstieg in die Atomphysik entwickelt und erprobt.

## 3. Fachdidaktischer Ansatz

### 3.1 Die Analogie der stehenden Welle

Schrödinger vollzog 1926 den Schritt von der alten zur neuen Quantentheorie. Er wollte "zeigen, daß die übliche Quantisierungsvorschrift sich durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von 'ganzen Zahlen' mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art wie etwa die Ganzzahligkeit der Knotenzahl einer schwingenden Saite." (Schrödinger 1926).

Die stabilen Zustände von Elektronen in gebundenen Zuständen entsprechen den stabilen Zuständen stehender Wellen auf begrenzten Medien. Beide stellen Lösungen von ähnlichen Differentialgleichungen unter physikalisch gesetzten Randbedingungen dar. In beiden Fällen ist es sinnvoll, von einem **Zustand n** zu sprechen, der durch die Frequenz  $f_n$  bzw. durch die Energie  $W_n$  und durch die Amplitude  $y_n(x)$  bzw. durch die Amplitude  $\psi_n(x)$  bestimmt wird. Im einzelnen ergeben sich folgende analoge Zuordnungen:

<u>Seil</u>	<b>Zustand n</b>	<u>Atom</u>
Frequenz $f_n$		Energie $W_n$
Amplitude $y_n(x)$		Amplitude $\psi_n(r)$
Knotenpunkte		Knotenflächen
Randbedingung: Knoten/Bauch		Randbedingung: $\psi \Rightarrow 0$
Inhomogenes Seil		Veränderliches Potential
$m' = f(x)$ (Massendichte)		$W_{\text{pot}} = W_{\text{pot}}(r)$ ("Potentialtopf")
$y_n''(x) \sim - f_n^2 m'(x) y_n(x)$		$\psi_n''(r) \sim - [W_n - W_{\text{pot}}(r)] \psi_n(r)$

### 3.2 Der Begriff Zustand

Der Begriff Zustand kann über die stehenden Wellen bereits in der klassischen Physik eingeführt werden und wird dort bereits in der folgenden Weise gekennzeichnet: Jeder Zustand eines schwingenden Systems hat einen **Namen n** (z.B. eine oder mehrere Nummern bzw. Quantenzahlen), er besitzt eine bestimmte **Eigen-Frequenz  $f_n$**  und eine bestimmte **Form**.

Die **Form** hat bei den klassischen stehenden Wellen eine sekundäre Bedeutung, gewinnt jedoch in der Quantenphysik als Aussage über Wahrscheinlichkeits- und Ladungsdichten große physikalische Bedeutung. Entsprechend der jeweiligen Anforderung der physikalischen Situation und dem mathematischen Abstraktionsvermögen der Schüler bieten sich mehrere Möglichkeiten zur Beschreibung der Form an:

- Angabe der Knotenanzahl
- Zeichnung der Form von Hand gemäß Beobachtung
- Zeichnung der Knoten (insbes. Knotenlinien bei 2-dim.st.W.)
- Zeichnung der Amplitudenfunktion  $y_n(x)$
- mathematische Angabe der Amplitudenfunktion, z.B.  $y_n = y_0 \sin(k x)$
- Zeichnung der Amplitudenfunktion mit dem Computer

Bei den gebundenen Zuständen von Elektronen in Atomen, Molekülen oder Festkörpern können Zustände völlig analog beschrieben werden:

- Name des Zustandes (z.B. eine oder mehrere Quantenzahlen)
- Energie des Zustandes, z.B.  $W_n$
- Amplitudenfunktion des Zustandes, z.B.  $\psi_n(x)$  oder Beschreibung.

Nach den Untersuchungen von BETHGE (1988) müßte ein solcher **Zustandsbegriff** an die Stelle von Beschreibungen mit Hilfe von Bahnen und Bewegungen der Elektronen treten, um Schülern bei der Überwindung falscher Vorstellungen zu helfen.

### 3.3 Das Modell Quant: Teilchen-Welle-Synthese

1. Quanten sind weder Teilchen noch Wellen, sie sind **etwas Neues**. Das Modell Quant stellt eine Synthese aus beiden Modellen dar. Die ältere Auffassung (häufig mit der Bezeichnung "Dualismus" verbunden), nach der Quanten je nach Experiment mal als Teilchen oder mal als Welle zu betrachten sind, wird ausdrücklich abgelehnt.

Diese Synthese drückt sich in den beiden fundamentalen Quantenbeziehungen aus:

<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: left;"> <p><b>Teilchengrößen:</b></p> <p><math>W, p</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><math>W = h \cdot f</math></p> </div> <div style="text-align: right;"> <p><b>Wellengrößen:</b></p> <p><math>p = h / \lambda</math></p> </div> </div>
---

In diesen Gleichungen werden Teilchen- und Wellengrößen miteinander in Beziehung gesetzt. Die Gleichungen dienen insbesondere als "Übersetzungsgleichungen", um Teilchen-Beziehungen (z.B. über die Summe der Energien in einem Potentialfeld) in entsprechende Wellengleichungen zu übersetzen. Das neue **Modell Quant** muß also auch vorstellungsmäßig beide verbinden.

2. Das anzustrebende neue, einheitliche **Modell Quant** wird folgendermaßen beschrieben:

- Es gibt "kleinste Einheiten" (Photonen, Elektronen; Quanten, "Quantonen", vgl. BUNGE 1975), die durch ihre Energie, ggf. durch ihren Impuls oder ihren Ort, bei Elektronen durch ihre Ladung und Masse gekennzeichnet sind ("Teilchenaspekt"). Sie werden bei Messungen punktförmig angetroffen.
- Diesen Quanten zugeordnet ist eine Wahrscheinlichkeitswelle ("Gespensterfeld", "de Broglie-Feldstärke", vgl. SCHECKER 1986), welche uns darüber Auskunft gibt, wo wir mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit das Quant finden können:  $|\psi|^2$  ist proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit, je größer  $|\psi|^2$  in einem bestimmten Bereich ist, desto häufiger findet man hier das Quant bei gleich präparierten

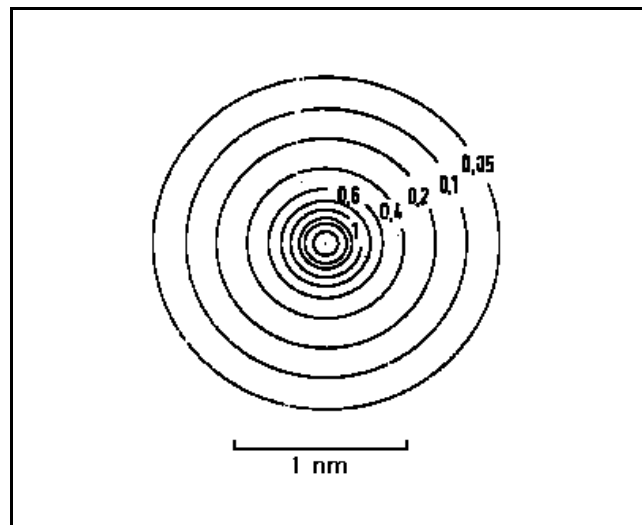
Systemen. Ist  $\psi^2=0$ , also  $\psi=0$ , dann wird man in der Nähe einer solchen Stelle das Quant sehr selten finden.

Bezüglich der physikalischen Interpretation dieser  $\psi$ -Funktion gibt es zwei Varianten: die Interpretation als "Antreffwahrscheinlichkeit" bei einer Messung und die Interpretation als (im zeitlichen Mittel) kontinuierliche und zeitlich konstante "Ladungsdichte" oder "Ladungswolke". Diese Vorstellung ist insbesondere in der Chemie sehr nützlich.

### Zur Interpretation der $\psi$ -Funktion

Die  $\psi$ -Funktion liefert Zahlenwerte für  $\psi^2$ . Diese  $\psi$ -Funktionen können in Abhängigkeit vom Ort ein-, zwei- oder dreidimensional grafisch dargestellt werden. Eine anschauliche 2-dimensionale Darstellung für den Grundzustand des H-Atoms liefert die nebenstehende Zeichnung. Die eingetragenen Zahlenwerte sind  $\psi$ -Werte in willkürlichen Einheiten.

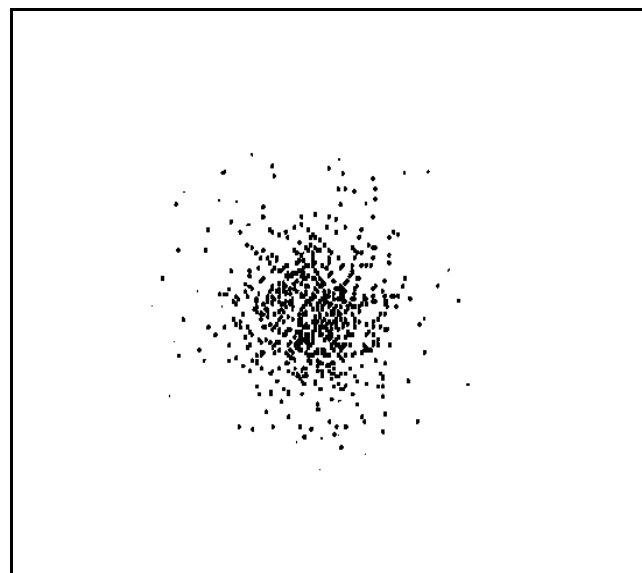
Grundzustand des H-Atoms



### Interpretation 1: Antreffwahrscheinlichkeit

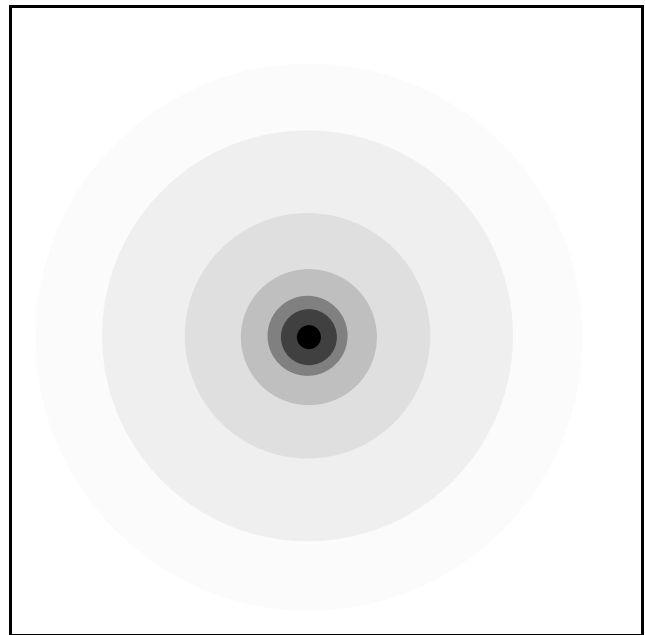
Hierbei wird das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion an der Stelle  $r$  gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte für das Antreffen eines Teilchens an dieser Stelle genommen. "Um die Antreffwahrscheinlichkeit zu veranschaulichen, denken wir uns ein Verfahren, mit dem wir zu sehr vielen Zeitpunkten das Elektron im H-Atom lokalisieren können."

(DORN-BADER 1977, S.91)



*Interpretation 2: Ladungsdichte, Ladungswolke*

Da das Elektron mit einer Ladung behaftet ist, kann die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons direkt mit der an einem bestimmten Ort vorhandenen Ladungsdichte in Verbindung gebracht werden. "Die Elektronen dagegen werden am besten als Ladungswolke betrachtet, deren Dichte sich von Ort zu Ort ändert ... Das Bild wäre dort am dunkelsten, wo die Elektronen ihre meiste Zeit verbringen ...". (McWEENEY1984)



**3.4 Von der de Broglie-Beziehung zur stationären Schrödinger-Gleichung**

Im Unterricht wird die de Broglie-Beziehung für freie Elektronen

$$\lambda = h / p$$

in bewährter Weise aus dem Elektronenbeugungsexperiment und zusätzlichen theoretischen Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen.

Der Übergang zu einer Wellengleichung für gebundene Elektronen kann nicht in Form einer strengen Ableitung geleistet werden. Es gibt jedoch die Möglichkeit, den wesentlichen Inhalt der Schrödinger-Gleichung für stationäre Zustände aus der obigen de Broglie-Beziehung plausibel zu machen.

Für ein klassisches Teilchen kann der Impuls aus der kinetischen Energie berechnet werden:

$$p = \sqrt{2m \cdot W_{kin}} = \sqrt{2m \cdot [W_{ges} - W_{pot}(x)]}$$

Berücksichtigt man nun den unten anschaulich entwickelten mathematischen Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und  $\psi$ , die obige "Übersetzungsgleichung" zwischen  $p$  und  $\lambda$ , sowie  $W_{ges} = W_n$ , so ergibt sich die Proportionalität:

$$\psi_n \sim e^{-[W_n - W_{pot}(x)]}$$

Diese Formel kann nun als Hypothese für gebundene Elektronen verwendet und geprüft werden. Sie stellt den wesentlichen Gehalt der stationären Schrödingergleichung dar. Für unsere anschauliche Vorstellung sind vor allem folgende Aussagen wichtig:

- Dort, wo der Wert des Potentials in einem Potentialtopf groß ist, ergibt sich eine  $\psi$ -Funktion mit kleiner Krümmung und umgekehrt. Mit dieser Aussage

kann die grobe Form *aller* -Funktionen in *allen* Atomen und Molekülen erklärt werden: Sie alle besitzen in Kernnähe ein niedriges Potential und damit große Krümmung und kleine Knotenabstände, während sich nach außen zu größeren Radien hin eine kleinere Krümmung und größere Knotenabstände ergeben.

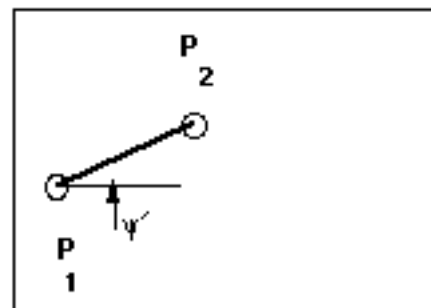
- Bei höheren Eigenwerten der Gesamtenergie  $W_n$  ergeben sich  $n$ -Kurven mit überall größerer Krümmung (also z.B. einer höheren Anzahl von Knoten und Bäuchen).
- Wird die Gleichung mit den richtigen Konstanten verwendet, so ergibt sich eine 100-prozentige Übereinstimmung zwischen den mit Computersimulationen berechneten Energieniveaus und den im Experiment gemessenen Frequenzen der ausgesandten Spektrallinien.
- Die mit Hilfe solcher Computersimulationen angebbaren Radien der Atome stimmen ebenfalls mit den experimentell (z.B. aus Gitterkonstanten) gefundenen Atomradien überein.

### 3.5 Die Bedeutung von $\psi''$

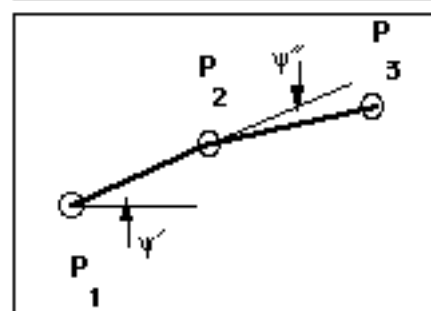
Bei dieser Frage ergibt sich der besonders glückliche Umstand, daß die Anwendung des Computers neben der Berechnung wichtiger Ergebnisse gleichzeitig zu einem tieferen Verständnis der Bedeutung der zweiten Ableitung führen kann. Die Ausgangsfrage lautet: *Wie konstruiert der Computer eine gesuchte -Funktion?*

Dabei treten folgende **Schritte** auf:

(1) Dem Computer werden vom Programm ein Anfangspunkt  $P_1$  und eine (beliebige) Anfangssteigung  $\psi'$  vorgegeben. Nun geht der Computer mit dieser vorgegeben Steigung geradlinig ein kleines Stück  $x$  von  $P_1$  nach  $P_2$ .

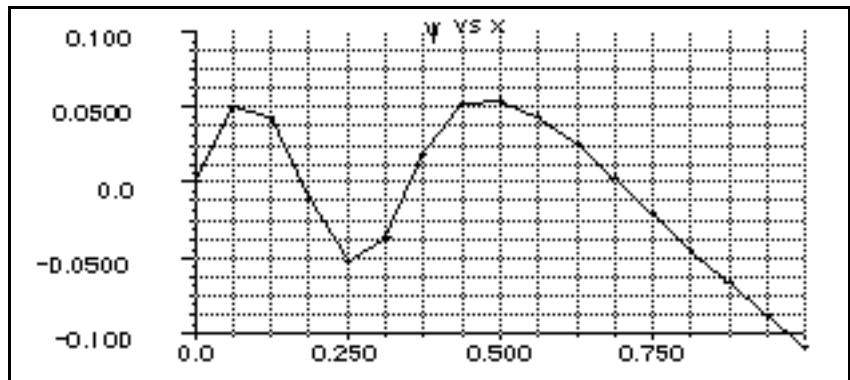


(2) In diesem Punkt  $P_2$  berechnet der Computer die Steigungsänderung  $\psi''$ . Diese Steigungsänderung wird dabei aus den gegebenen physikalischen Größen (Gesamtenergie  $W_n$ , potentielle Energie  $W_{pot}(x)$  und Wert der Funktion  $\psi(x)$  an der Stelle  $x$  im Punkt  $P_2$ ) berechnet (vgl.oben).





Ein Beispiel für eine solche schrittweise Konstruktion der  $\psi$ -Funktion mit relativ großer Schrittweite zeigt die nebenstehende Abbildung. Sie zeigt auch, daß größere Steigungsänderungen zu einem kleineren Knotenabstand führen.



Häufig haben  $\psi$ -Funktionen

einen sinusartigen Verlauf. Dieser ergibt sich daraus, daß die Steigungsänderung wegen der Proportionalität  $\psi'' \sim -\psi$  immer zur x-Achse hin erfolgt. Dabei bedeutet positive Steigungsänderung, daß die Steigung größer (steiler) wird, was einer Drehung nach links entspricht. Umgekehrt bedeutet eine negative Steigungsänderung, daß die Steigung kleiner wird, was einer Drehung nach rechts entspricht. Oberhalb der x-Achse besitzt die  $\psi$ -Funktion positive Werte,  $\psi''$  besitzt also negative Werte, die Kurve ist zur x-Achse hin gekrümmt. Umgekehrt entsprechen Punkte unterhalb der x-Achse negativen  $\psi$ -Werten, also positiven  $\psi''$ -Werten, die Kurve ist nach oben zur x-Achse hin gekrümmt.

Aus dieser anschaulichen Betrachtung ergibt sich ein weiterer wichtiger Zusammenhang: Bei großen Steigungsänderungen wird der Verlauf der  $\psi$ -Funktion schneller zurück zur x-Achse führen, also zum nächsten Knoten, was einer kleineren Wellenlänge der Kurve entspricht. Generell entsprechen große  $\psi''$ -Werte kleinen Wellenlängen. Im einfachsten Fall einer konstanten Wellenlänge gilt die Beziehung

$$\psi'' \sim - (1 / \lambda^2) \psi .$$

### 3.6 Wichtige Elemente eines anschaulichen Quanten-Atommodells

Aus den dargestellten Überlegungen ergeben sich folgende anschaulichen Komponenten:

- Die Existenz von diskreten *Zuständen* in Analogie zu räumlichen stehenden Wellen;
- eine räumliche, dreidimensionale Vorstellung von der Größe und Form eines (Wasserstoff-)Atoms, basierend auf der  $\psi$ -Funktion ("Orbital"). Diese tritt an die Stelle von eher zweidimensionalen Bahnvorstellungen;
- die räumliche Vorstellung der Form in den einzelnen Zuständen wird durch die Vorstellung der Knotenflächen erheblich unterstützt und präzisiert.

## 4. Unterrichtsverlauf

### 4.1 Alternativen

Aus unseren bisherigen Erfahrungen und Erprobungen eines solchen Konzepts schälten sich zwei extreme Alternativen für einen Unterrichtsverlauf heraus:

- Die erste Alternative orientiert sich stärker am Konzept eines am Schülervorverständnis orientierten Unterrichts (SVU) und wurde als Fallstudie bereits beschrieben (NIEDDERER 1991). Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß ein großer Teil des Unterrichts dem Entwickeln der eigenen Vorstellungen der Schüler vom Atom gewidmet ist - mit großer Nähe zum Bohrschen Atommodell, welches jedoch vom Lehrer *nicht* aktiv gefördert wird - , bevor im zweiten Teil des Unterrichts ein an der Vorstellung stehender Wellen orientiertes Quantenmodell des Atoms eingeführt wird.
- Die zweite Alternative steuert die Aufmerksamkeit der Schüler von vorneherein in Richtung auf ein an der Vorstellung von dreidimensionalen stehenden Wellen orientiertes Quantenmodell des Atoms. Sie wurde im Herbst 1991 in einem Leistungskurs in Bremen vom Verfasser in etwa 4 Wochen unterrichtet und soll im folgenden etwas näher beschrieben werden.

### 4.2 Einführung der allgemeinen Idee

Der Kurs bestand aus 9 Schülern, die seit der 11.Klasse im Rahmen des Modellversuches "Computereinsatz im Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe (CPU)" (NIEDDERER, BETHGE, SCHECKER 1992) in verstärktem Maße mit dem Computer gearbeitet hatten. Dabei wurde der Computer schwerpunktmäßig "auf der Theorieebene" zur Entwicklung von Modellen mit Hilfe des Modellbildungssystems STELLA (für Macintosh Computer<sup>2</sup>) in den Bereichen Mechanik, Schwingungen und Felder eingesetzt.<sup>3</sup> Die Schüler hatten in den zweieinhalb Jahren oft Gelegenheit, in Gruppenarbeit eigene Modelle interaktiv am Computer zu entwickeln.

Der Unterricht begann damit, daß Vorstellungen der Schüler über das Elektron aus der Elektronenbeugung aufgegriffen und mit ihrem Vorwissen über den Aufbau von Atomen aus Kern und Elektronenhülle konfrontiert wurden. Daraus wurde dann die Idee stehender Elektronen-Wahrscheinlichkeitswellen als Vorstellung für den Aufbau der Hülle entwickelt. Hierbei spielten zwei Probleme eine zentrale Rolle:

- Elektronen werden vom Kern festgehalten, sie bleiben normalerweise im Atom. Was heißt das für die Elektronenwelle?

---

<sup>2</sup> Ein ähnliches Modellbildungssystem liegt seit kuzem mit MODUS (Comet-Verlag) auch für DOS-Computer vor.

<sup>3</sup> Eine Beschreibung von STELLA und seiner Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht sowie viele weitere Beispiele von STELLA-Physikmodellen wurden im Projekt CPU (Computereinsatz im Physikunterricht) erarbeitet (vgl. Niederderer, Bethge, Schecker 1992).

- Mechanische, akustische und elektromagnetische Wellen, welche durch Ränder begrenzt werden, bilden stehende Wellen.

Aus dieser Diskussion entstand die hartnäckige Frage der Schüler: Was ist der "Rand" im (Wasserstoff-)Atom? Diese Frage wurde im Unterricht nicht umfassend diskutiert. Es wurde lediglich festgehalten, daß ein "Rand" existieren muß, weil sonst die Welle aus dem Atom entweichen würde, was nach der Wahrscheinlichkeitsdeutung auch zu einem Entweichen des Elektrons und damit zum Zerfall des Atoms führen würde. Außerdem wurde festgehalten, daß die elektrische Anziehung zwischen Kern und Elektron für diesen "Rand" verantwortlich sein müßte, so daß man sich eine Art "weichen Rand" vorstellen müßte.

Eine genauere physikalische Erläuterung des Randes müßte von dem Zusammenhang zwischen elektrischem Potential und Brechungsindex für Elektronenwellen ausgehen und das Verhalten von Wellen in einem Medium mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex (wie zum Beispiel bei der Luftspiegelung) einbeziehen. Das resultierende Bild wäre bei einer kugelsymmetrischen Welle durch eine kontinuierliche teilweise Reflektion an allen konzentrischen Kugelschalen gekennzeichnet.

### **4.3 Mechanische stehende Wellen zur Einführung wichtiger Begriffe und Arbeitsverfahren**

#### **4.3.1 Eindimensionale stehende Seilwellen**

*Stehende Wellen auf einem "Stufenseil" (Experiment und Computermodell mit STELLA)*

Nachdem die allgemeine Idee "Atomhülle als stehende Elektronenwelle" als Fernziel eingeführt war, wurde jetzt eine genauere Untersuchung von 1-dimensionalen stehenden Wellen auf verschiedenartigen Seilen angepeilt. Mit einführenden Demonstrationsexperimenten wurden zunächst allgemeine Gesetzmäßigkeiten wiederholt und weiterentwickelt:

- $n \lambda/2 = L$ , (L: Länge des Seils), als Bedingung für die Ausbildung stehender Wellen.
- Abhängigkeit der Wellenlänge von der Frequenz  $f$ , der Seilspannung  $F$  (realisiert durch ein angehängtes Gewicht über eine Rolle) und der Massendichte  $m'$  ("Schwere" des Seils, definiert als Masse pro Länge).
- Beobachtung sinusförmiger und nicht-sinusförmiger Formen von stehenden Seilwellen auf verschiedenartigen Perlenketten.<sup>4</sup>

Nun wird die Amplitudenfunktion  $y(x)$  eingeführt. Ihre zweite Ableitung  $y''$  wird als Krümmung auch in Zusammenhang mit der Wellenlänge gebracht: Je größer  $y''$ ,

---

<sup>4</sup>Die Perlenketten sind 53 cm lang und sind so hergestellt, daß zwei oder mehr verschiedene Massendichten auf einem Seil durch Faden- und Perlenstücke unterschiedlicher Art realisiert werden. (Hergestellt von M.Fennekohl und W.Hoffmann, Physikpraktikum Universität Bremen).

desto kleiner wird  $\lambda$ . Für  $y''$  müssen also ähnliche Gesetze gelten wie für  $y$ . Für die weitere Arbeit mit dem Computer stellen wir nach dieser halbquantitativen Einführung die folgende Formel bereit:

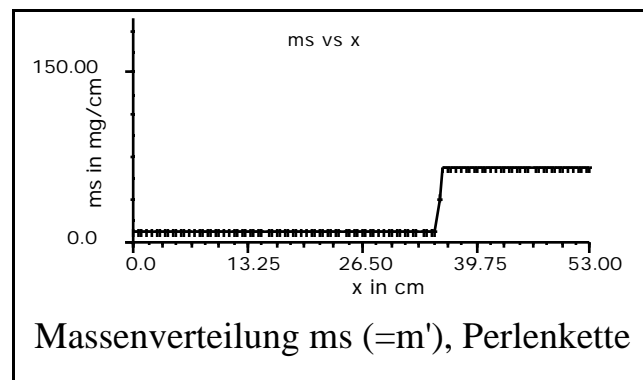
$$y'' = -4\pi^2 * f^2 * m'/F * y .$$

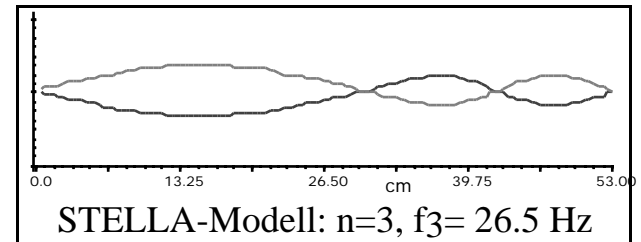
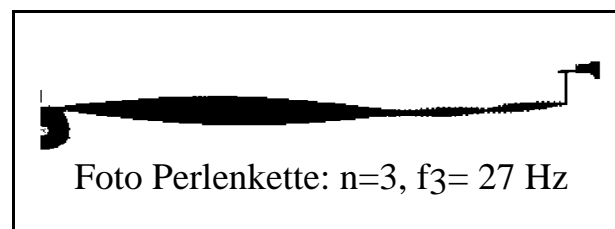
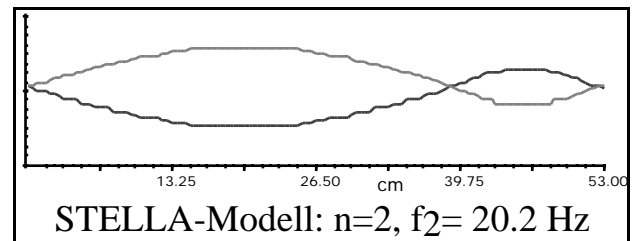
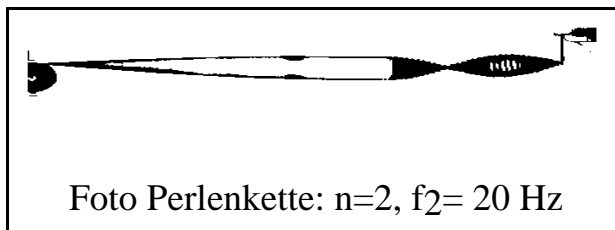
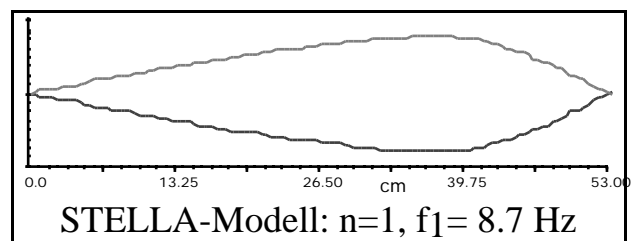
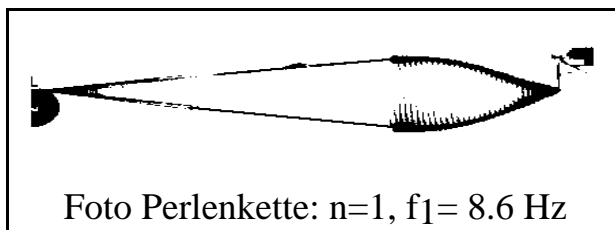
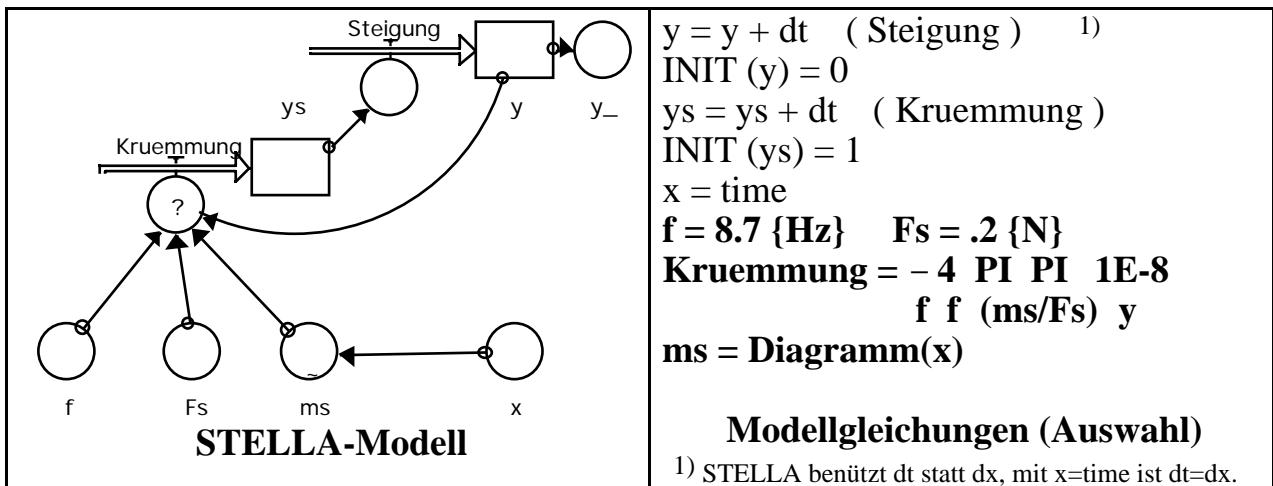
Danach erhalten alle 4 Schülergruppen verschiedene "Stufenseile" (mit zwei verschiedenen Massendichten auf einem Seil) mit der Aufgabe, die ersten **drei Zustände** der stehenden Seilwellen (Eigenfrequenzen  $f_n$  und Amplitudenfunktionen  $y_n(x)$ ) sowohl im Experiment als auch mit dem Computer zu bestimmen.

Die Ergebnisse auf den folgenden Seiten sind besonders geeignet, den - für das spätere Verständnis der  $y''$ -Funktion - wichtigen Zusammenhang zwischen der Massendichte  $m'(x)$  an einer Seilstelle  $x$  und der dort zu beobachtenden Krümmung  $y''(x)$  der Amplitudenkurve zu erarbeiten.

### Ergebnisse Stufenseil:

Eine Perlenkette besteht von 0 bis 38 cm aus einer Perlonschnur, auf die von 38 bis 53 cm gelbe Perlen der Masse 80 mg/cm aufgefädelt sind. Diese Kette wird mit einem Hängegewicht von 0.2 N gespannt und mit Gleichstrommotor und Frequenzgenerator in Schwingungen versetzt.



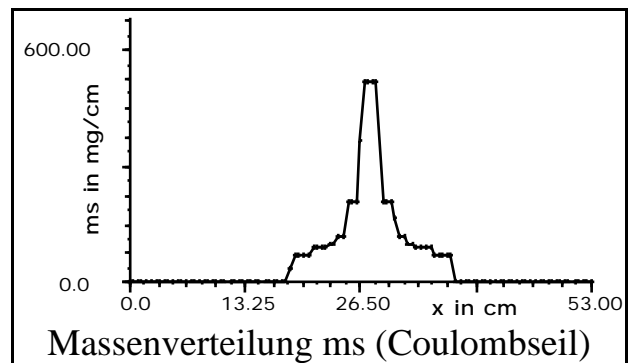


### Stehende Seilwellen auf einem "Coulomb-Seil"

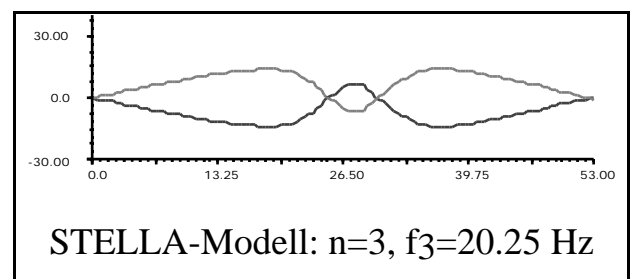
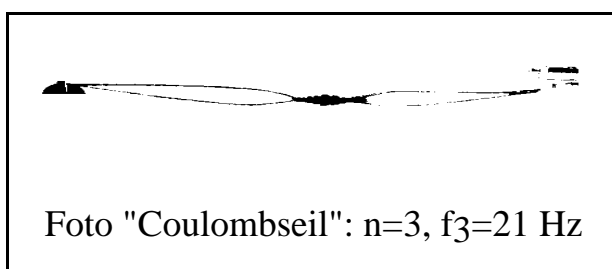
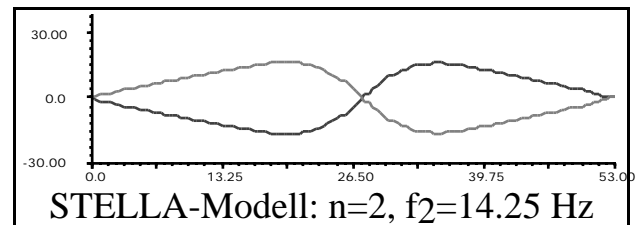
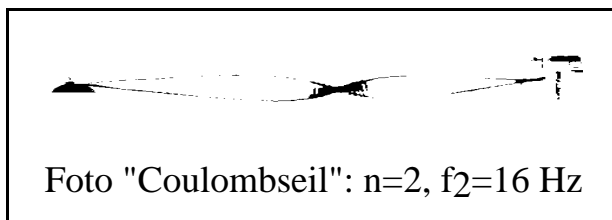
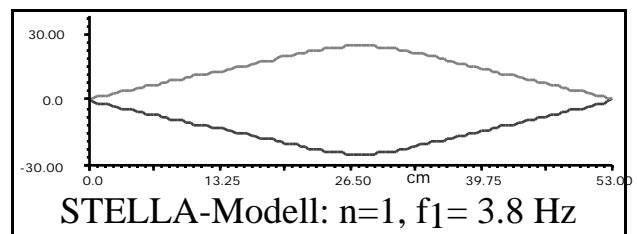
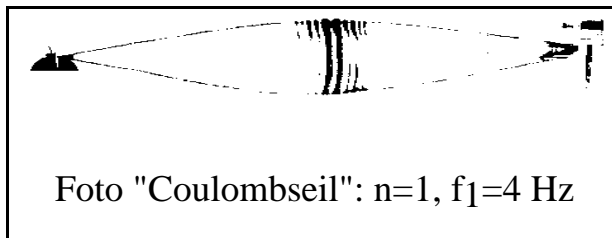
Um stehende Wellen auf einem Seil zu erzeugen, die eine ähnliche Form wie - Funktionen von Elektronen in einem Coulombpotential besitzen, wurde eine entsprechende Massenverteilung berechnet und mit verschiedenartigen Perlen auf einem Seil näherungsweise realisiert (NIEDDERER 1983). Im folgenden werden

die Ergebnisse wiederum mit Fotos aus dem Experiment und Ergebnissen eines entsprechenden STELLA-Modells dargestellt.

Dabei müssen die Punkte "STELLA-Modell" und "Modellgleichungen" nicht erneut dargestellt werden: sie sind identisch! Der einzige Unterschied besteht in der geänderten Massenverteilung, die graphisch durch Mausklicks oder als Tabelle aus den Wägungen in das Computermodell eingegeben werden.



*Ergebnisse:*












### 4.3.2 Zweidimensionale stehende Wellen auf einem Tamburin

Die Vorstellung von stehenden Wellen in zwei und drei Dimensionen dient wesentlich zur Entwicklung räumlicher Vorstellungen vom Atom. Dabei ist folgende Systematik hilfreich:

<b>Stehende Wellen</b>	Eindimensional	Zweidimensional	Dreidimensional
Knotenart	Punkte	Linien	Flächen
Knotensysteme	Ein System	Zwei Systeme, z.B. Kreise+Geraden	Drei Systeme, z.B. Kugelflächen, Ebenen und Doppelkegel
"Quantenzahlen"	eine, z.B. n	zwei, z.B. n, m	drei, z.B. n,m,l

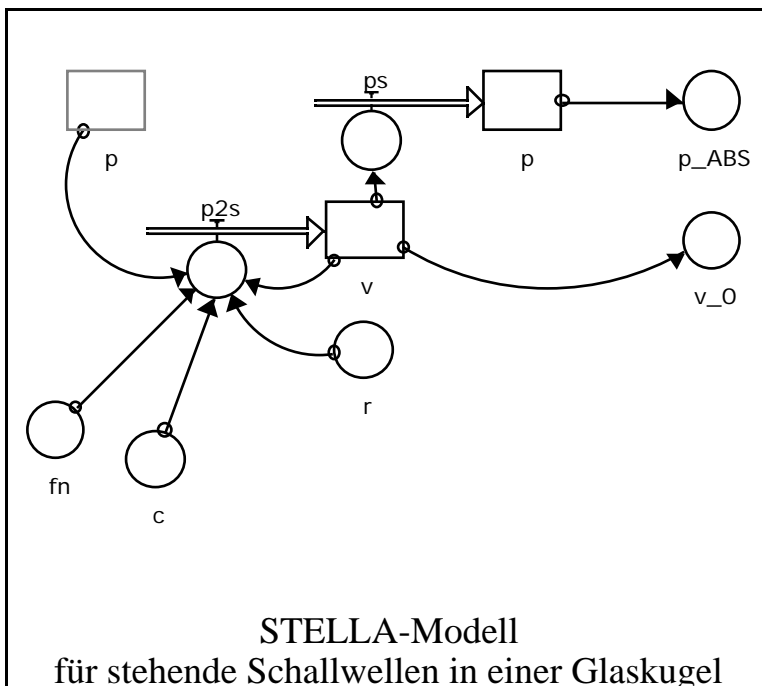
Die folgende Abbildung zeigt Aufnahmen eines schwingenden Tamburins, das mit einem Lautsprecher unterhalb der Membrane angeregt wurde. Zur Sichtbarmachung der Knotenlinien wurde weißer Sand auf die vibrierende Membran gestreut, der entlang der jeweiligen Knotenlinien liegenbleibt. Zu sehen sind stehende Wellen mit 0 bis 3 Knotengeraden (Durchmessern) in den Zeilen und 0 bis 2 Knotenkreisen in den Spalten sowie einige interessante Kombinationen und die jeweiligen Eigenfrequenzen.

$\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \backslash \begin{matrix} n \\ \phi \end{matrix}$	0	1	2	3
0	 139 Hz	 211 Hz	 288 Hz	 366 Hz
1	 304 Hz	 435 Hz	 517 Hz	 581 Hz
2	 455 Hz	Eigenfrequenzen und Knotenlinien eines Tamburins		

### 4.3.3 Dreidimensionale stehende Schallwellen in einer Glaskugel

Die theoretischen Lösungen von dreidimensionalen Schallwellen mit Kugelrand und die von  $\psi$ -Funktion in einem H-Atom sind insbesondere hinsichtlich der Winkelfunktionen weitgehend äquivalent (vgl. COURANT-HILBERT I, S.270). Dreidimensionale stehende Schallwellen in einer Glaskugel können daher zur Veranschaulichung von Zuständen dienen, die insbesondere durch ihre Eigenfrequenzen und ihre Knotenflächen gekennzeichnet sind. Dazu wurden solche *stehenden Schallwellen in einer Glaskugel* von 12,5 cm Ø erzeugt. Es wurden *zwei verschiedenen Anordnungen* verwendet: *eine* zur Ausmessung des Druckverlaufs mit einer längs eines Durchmessers verschobenen Mikrofonsonde, *die andere* zur Sichtbarmachung der Knoten mit einem entlang eines Durchmessers eingebauten Glühdraht (Konstantendraht 0,1 mm Ø). Zur Einführung der Sonden und des erregenden Lautsprechers waren zwei Öffnungen von je ca. 2 cm Ø in der Glaskugel angebracht. Es wurden verschiedene Resonanzfrequenzen beobachtet und ein **Videofilm**<sup>5</sup> über die beobachteten Glühdrahtmuster bei verschiedenen Frequenzen zwischen 1800 Hz und 13000 Hz erstellt.

Außerdem wurde die folgende **Computersimulation** mit dem Modellbildungsrahmenprogramm STELLA (auf Macintosh) gerechnet. Sie geht ebenfalls von der Annahme kugelsymmetrischer Lösungen aus:



```

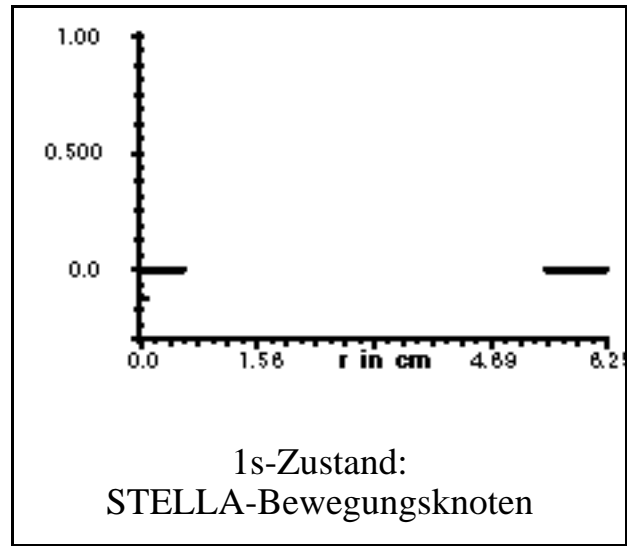
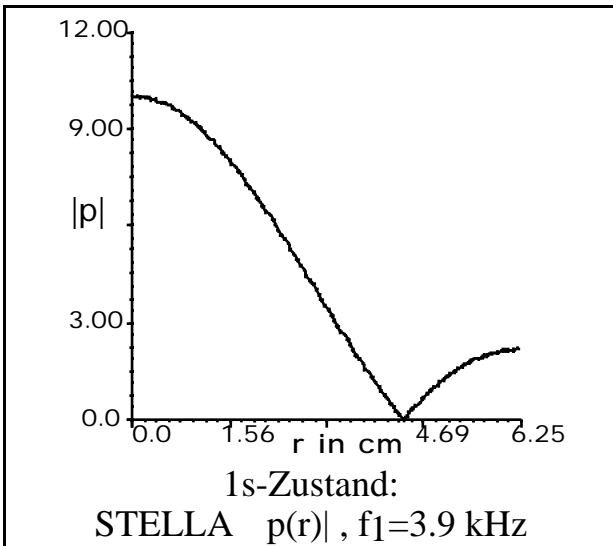
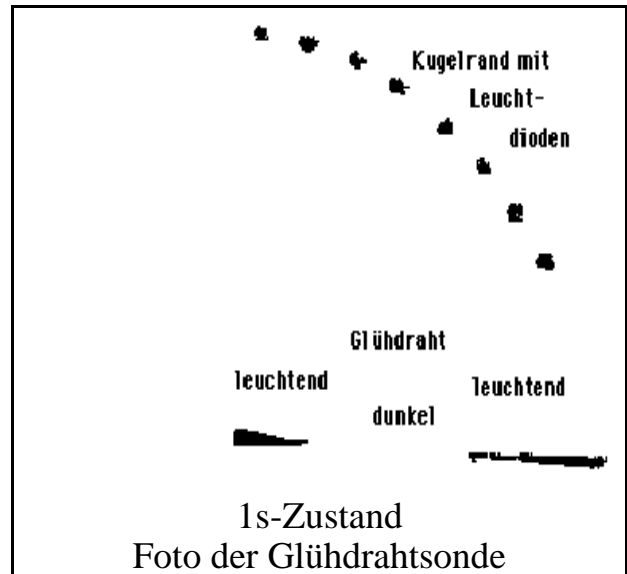
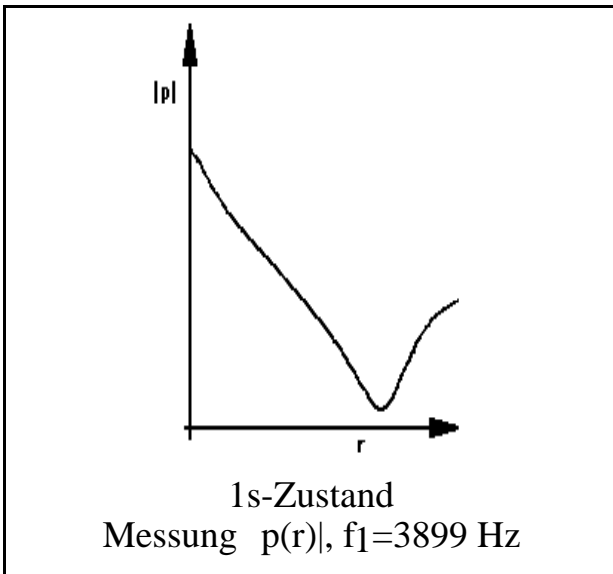
p = p + dt ( ps ) 1)
INIT ( p ) = 10
v = v + dt ( p2s )
INIT ( v ) = 0
c = 34 { 10m/s }
fn = 3.9 { kHz }
p2s = - 4 p^2/c^2 fn ^2 p
ps = v
p_ABS = SQRT(p^2)
r = time
v_0 = IF v^2<1 THEN 0
ELSE 2

Modellgleichungen

1) STELLA benützt dt statt dr, mit r=time
ist dt=dr.
    
```

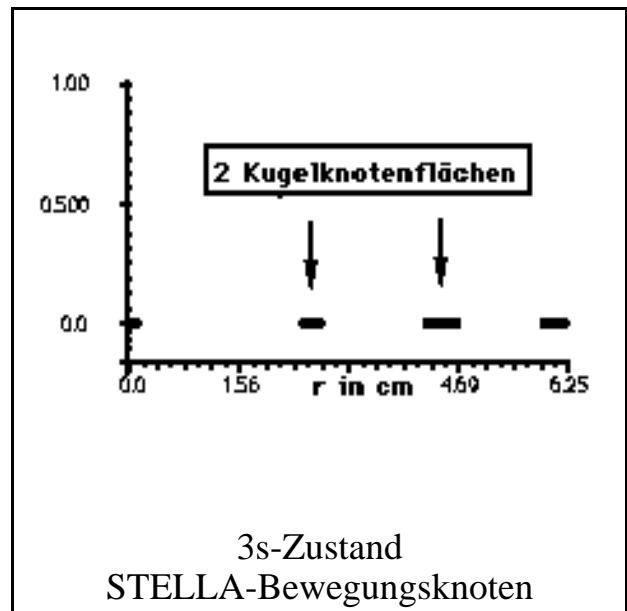
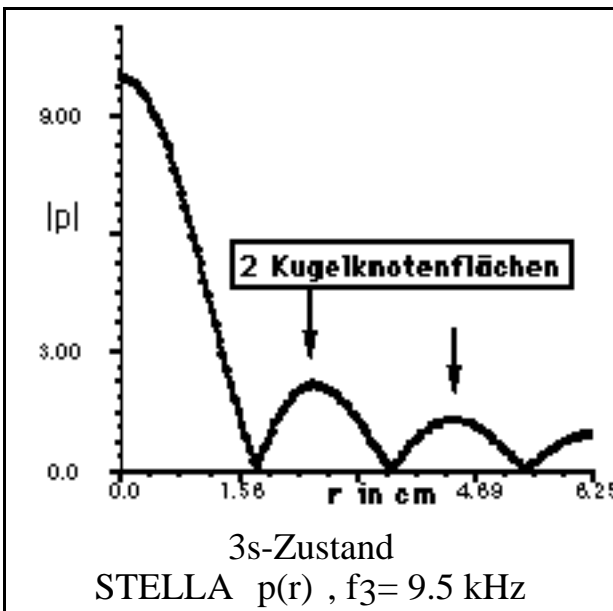
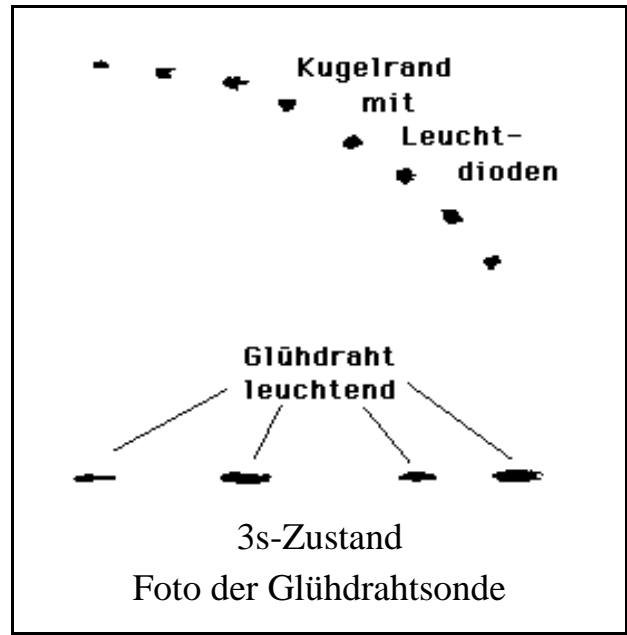
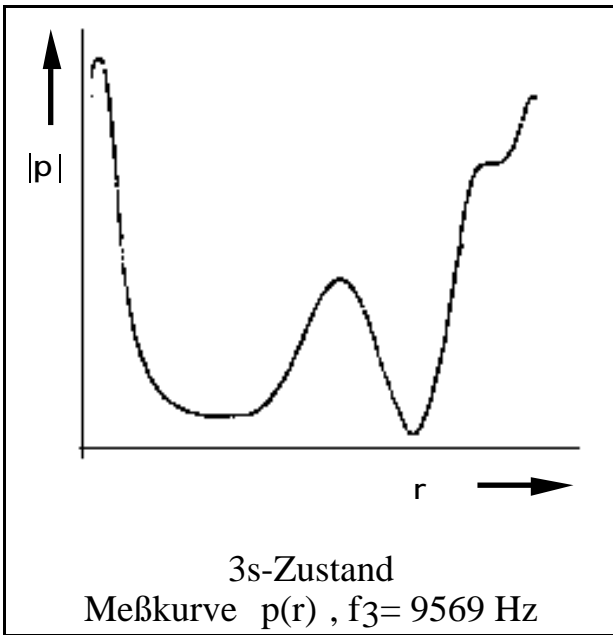
<sup>5</sup> Hergestellt im Physikpraktikum der Universität Bremen von M.Fennekohl.





Alle kugelsymmetrischen Zustände (s-Zustände) besitzen einen Knoten (und Druckmaximum) in der Mitte und am Rand sowie ggf. zusätzliche Kugel-Knotenflächen.<sup>6</sup> Die Abbildungen zeigen Ergebnisse der Experimente und Computersimulationen für den 1s-Zustand (oben, keine weiteren Kugel-Knotenflächen) und für den 3s-Zustand (unten, zwei weitere Kugel-Knotenflächen). Die Bilder des 1s-Zustandes zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messungen und Kurvenverlauf sowie in der gemessenen bzw. berechneten Eigenfrequenz.

<sup>6</sup> In einer früheren Veröffentlichung - NIEDDERER 1983 - war hier fälschlicherweise ein Bauch in der Mitte angenommen worden.



Bei den Bildern zum 3s-Zustand gilt das nur noch teilweise. Die Anzahl und Lage der Maxima und Knoten, sowie die Eigenfrequenz stimmen zwar in Messung und Rechnung weitgehend überein, beim Verlauf der  $|p(r)|$ -Kurve zeigen sich jedoch deutliche Abweichungen, die wir auf die durch Löcher, Ausdehnung der Mikrofonsonde und Lautsprecher verursachten Veränderungen des Schallfeldes zurückführen.

## 5. Energieniveaus, Eigenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten beim H-Atom

In dem Unterrichtsversuch im Herbst 1991 benötigte der Unterricht zur Einführung der Idee und zur Behandlung der 1-, 2- und 3-dimensionalen stehenden mechanischen Wellen zwei Wochen mit je sechs Stunden. In dieser Zeit wurden von den Schülern in Gruppenarbeit je zwei verschiedene vorgegebene Perlenketten experimentell untersucht (Eigenfrequenzen und Form der Amplitudenfunktion) sowie eigene Computermodelle mit STELLA erstellt und angewendet. Ferner wurden ergänzend im Klassenunterricht 2- und 3- dimensionale stehende Wellen im Experiment vorgeführt und bezüglich der Entwicklung räumlicher Vorstellungen diskutiert. Die Schüler sollten in diesem Abschnitt folgendes für die weitere Arbeit in der Atomphysik Wichtige gelernt haben<sup>7</sup>:

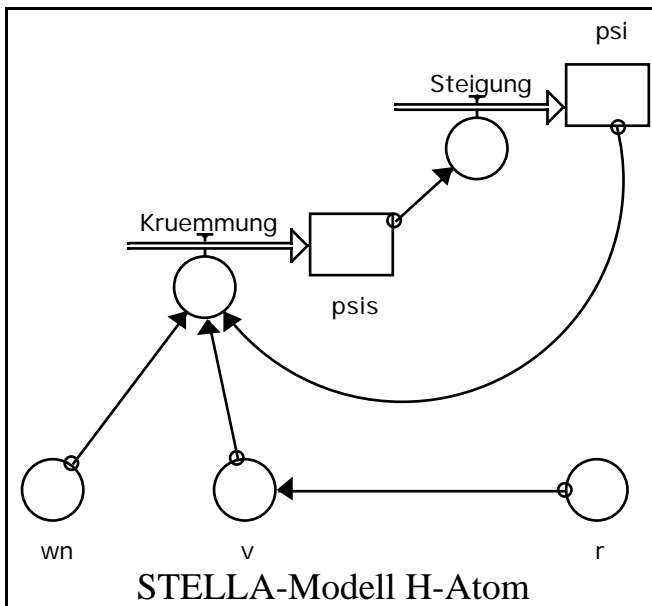
- Kennzeichnung von Zuständen stehender Wellen durch deren Eigenfrequenz  $f_n$  und die Form der Amplitudenfunktion  $y_n(x)$ .
- Entstehung nicht-sinusförmiger Amplitudenfunktionen durch eine entlang des Seils ( $x$ -Koordinate) veränderliche Massendichte; Beobachtungen zur Krümmung dieser Funktion, ihr Zusammenhang mit der jeweiligen Massendichte und mit der zweiten Ableitung  $y''$ ; Zusammenhang zwischen  $y''$  und Massendichte.
- Erstellung eines graphik-orientierten Computermodells (STELLA) und dessen Anwendung auf konkrete Seile, Vergleich der gerechneten und gemessenen Amplitudenfunktionen.
- Bestimmung von Eigenwerten mit dem Computer durch ein systematisches Trial-and-error Verfahren, bei dem die durch das Experiment vorgegebenen Randbedingungen (Knoten) durch den Computer realisiert werden. Dieses Verfahren demonstriert fast spielerisch eindrücklich den engen Zusammenhang zwischen Eigenwert und Randbedingung.

Das Ziel des weiteren Unterrichts war nun die Anwendung dieser Kenntnisse zur Erarbeitung eines modernen quantenmechanischen Atommodells unter Einbeziehung anschaulicher Elemente aus der Analogie zu stehenden Wellen, zunächst für das H-Atom.

Es wurde also mit den oben unter Punkt 3 dargestellten Überlegungen auf eine Gleichung für " hingearbeitet, um anschließend das folgende STELLA-Modell zur Berechnung der Zustände im H-Atom durch die Schüler selbst erarbeiten zu lassen.

---

<sup>7</sup> Eine genauere Analyse des Lernprozesses durch Auswertung der Videobänder wird z.Zt. bearbeitet.



$$\begin{aligned} \psi &= \psi + dt \quad (\text{Steigung}) \\ \text{INIT}(\psi) &= 0 \\ \text{psis} &= \text{psis} + dt \quad (\text{Kruemmung}) \\ \text{INIT}(\text{psis}) &= 1 \\ \text{Steigung} &= \text{psis} \\ r &= \text{time} \{ \text{nm} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kruemmung} &= -26.4 (W_n - W_{\text{pot}}) \psi \\ W_{\text{pot}} &= -1.44/r \{ \text{eV} \} \\ W_n &= -13.6 \{ \text{eV} \} \end{aligned}$$

Modellgleichungen

Dieses STELLA-Modell gilt für kugelsymmetrische Zustände (s-Zustände). Es verwendet die stationäre *Schrödingergleichung* in der Form

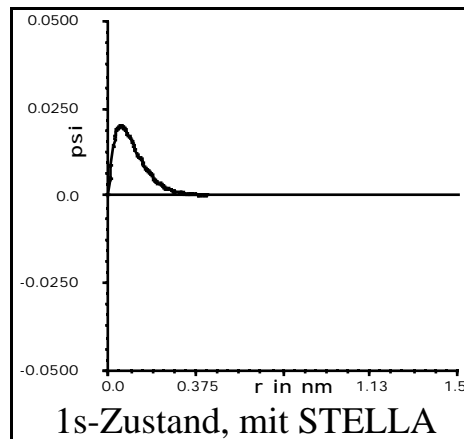
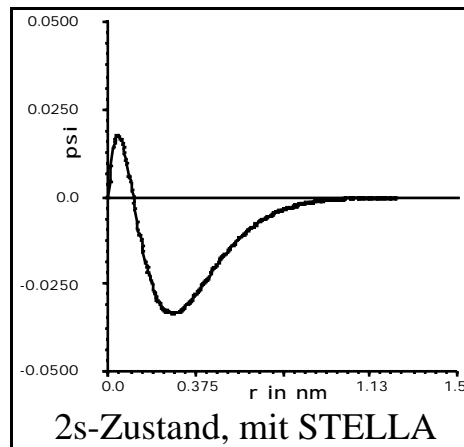
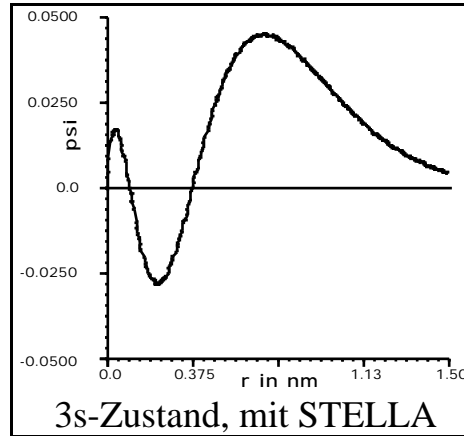
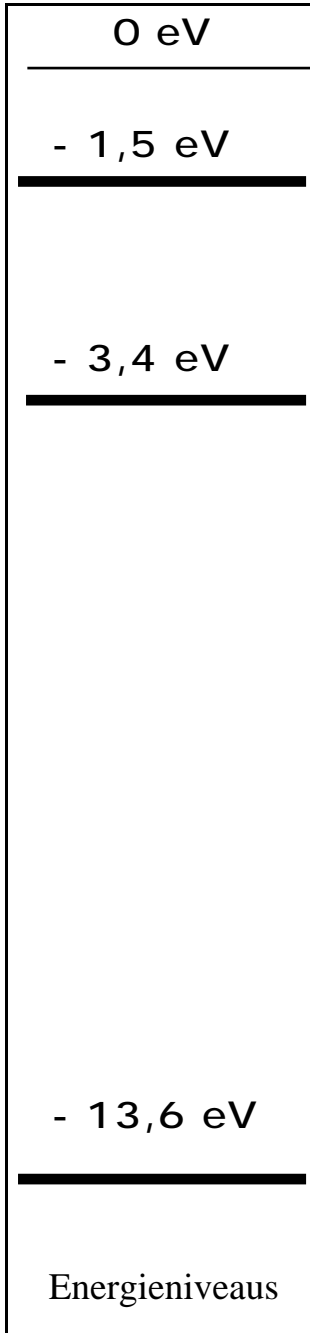
$$\text{Kruemmung } \psi'' = -26.4 (W_n - W_{\text{pot}}) \psi.$$

Diese Gleichung wurde im Unterricht in der im Abschnitt 3 erläuterten Weise plausibel gemacht; die Konstante 26.4 ergibt sich als Wert von  $2m/\hbar^2$  in den gewählten Einheiten nm und eV. Das Analoge gilt für den Wert 1.44 im Coulombpotential. Beide Zahlenwerte wurden den Schülern nach entsprechender Diskussion vom Lehrer vorgegeben. Das Modell weist streng genommen einen systematischen Fehler auf: Es gilt in dieser Form nur für den eindimensionalen Fall, also ein eindimensionales Coulombpotential. Da jedoch die kugelsymmetrischen dreidimensionalen Lösungen aus den eindimensionalen sich durch Division von  $r$  ergeben und bei der Berechnung der *radialen* Aufenthaltswahrscheinlichkeit ein Faktor  $r^2$  hinzukommt, gibt das Quadrat der hier vereinfacht berechneten  $\psi$ -Funktion gerade exakt die üblicherweise verwendete *radiale* Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte an. Die berechneten Energieeigenwerte sind - bis auf die üblichen bei Iterationen auftretenden Ungenauigkeiten - exakt richtig.

Im Unterricht wurde auf eine explizite Unterscheidung von 1- und 3-dimensionaler  $\psi$ -Funktion verzichtet, die Aussagen wurden immer als räumliche Aussagen über kugelsymmetrische Zustände interpretiert.

Ergänzend zu den Computersimulationen und den üblichen Experimenten (H-Spektrum, Franck-Hertz-Versuch) wurde im Unterricht die Formel für die Energieniveaus des H-Atoms näherungsweise aus der Vorstellung stehender Wellen abgeleitet (vgl. unten Punkt 6).

## Ergebnisse: Die ersten drei Zustände des H-Atoms

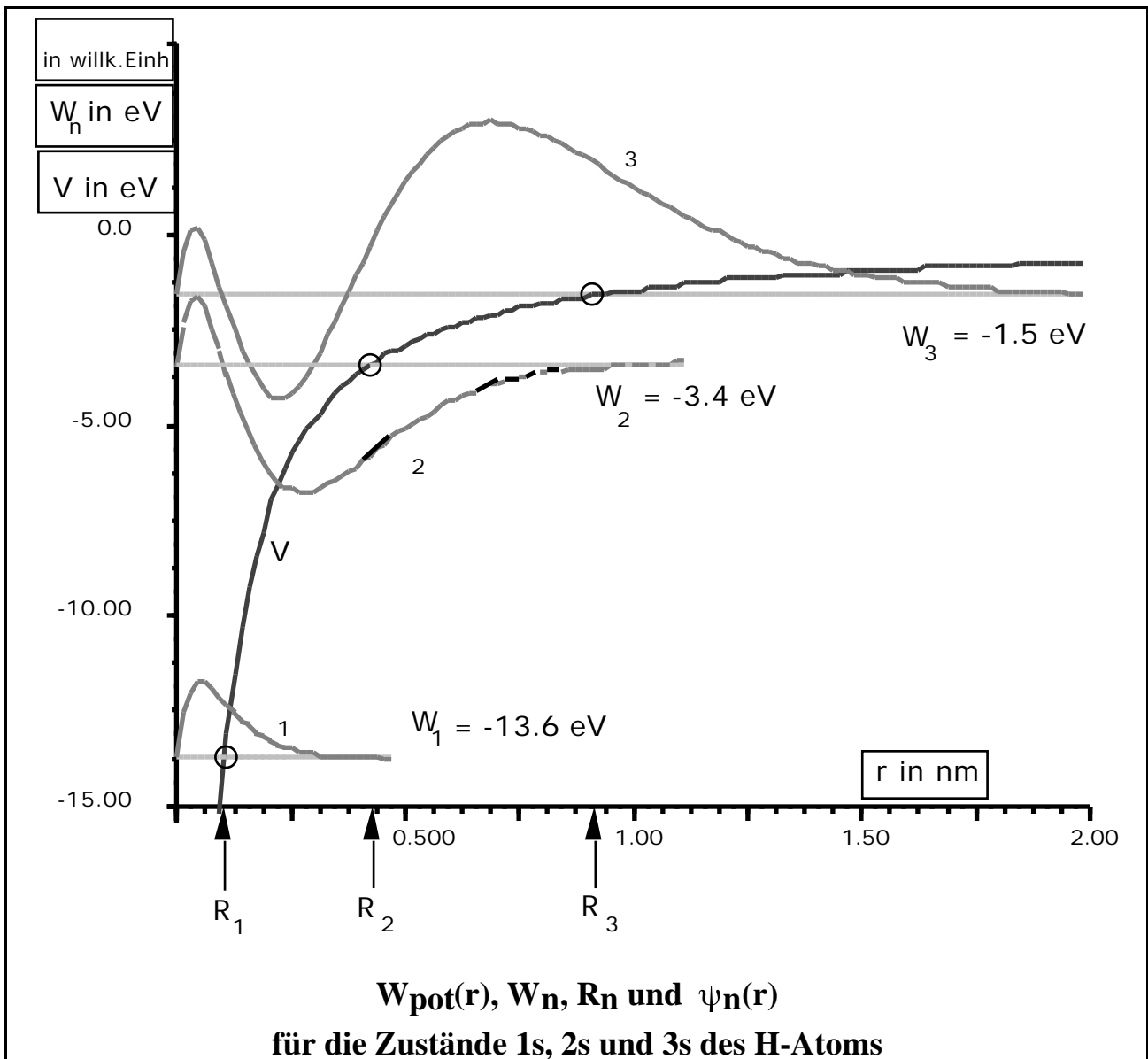


Die Punktdichte-Darstellung kann auch mit STELLA gerechnet werden, sieht dort jedoch nicht ganz so gut aus; sie wurde hier mit einem eigenen Spezialprogramm für das H-Atom gewonnen.<sup>8</sup> Die obigen Bilder sind alle mit demselben Maßstab auf der r-Achse gezeichnet, sie geben also insbesondere eine anschauliche Vorstellung über die Vergrößerung des H-Atoms bei der Anregung, also von  $n=1$  zu höheren Zuständen.

Eine **andere Darstellung** dieser Energieniveaus und Zustände, die nachfolgend gegeben wird, betont den Zusammenhang von Potential  $W_{\text{pot}}(r)$  mit der jeweiligen

<sup>8</sup> Die Anpassung einer ursprünglichen Fassung für C64 von H.Niedderer an den Macintosh (in Pascal) stammt von T.Bethge.

Krümmung der  $\psi$ -Funktion in den verschiedenen Zuständen und faßt alle Ergebnisse in einem Bild zusammen:



Auch in diesem Bild erkennt man deutlich die Vergrößerung des Atoms bei der Anregung. Die Abhängigkeit der Krümmung der  $\psi$ -Funktion von  $W_{\text{pot}}$  und  $W_n$  ist in allen drei Zuständen gut zu erkennen: Überall nimmt die Krümmung von innen (kleines  $r$ ) nach außen (großes  $r$ ) zu, die Knotenabstände werden größer, die Kurven flacher. Bei größerem  $W_n$  (höherer Zustand) ist die Krümmung an vergleichbaren Punkten stärker als bei kleinem  $W_n$  (niedrigerer Zustand).

## 6. Näherungsweise Herleitung der Formel für die Energieniveaus des H-Atoms

### Bezeichnungen

- $n$  : Nummer des betrachteten Zustandes
- $W_n$ : Gesamtenergie des Zustandes  $n$
- $R_n$ : Abschätzung des Atomradius im Zustand  $n$
- $\bar{\lambda}_n$  : Abschätzung der mittleren de Broglie-Wellenlänge im Zustand  $n$
- $h$  : Plancksches Wirkungsquantum
- $W_{\text{pot}}(\mathbf{r})$  : Potential des Elektrons im H-Atom

Grundgleichung für Quanten ( De Broglie-Gleichung ) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \dots (1)$$

Klassische Hilfsgleichungen :

Coulombpotential:

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \dots (2)$$

Kinetische Energie und Impuls:

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2m W_{\text{kin}}} = \sqrt{2m (W_{\text{ges}} - W_{\text{pot}})} \quad \dots (3)$$

Die folgende näherungsweise Ableitung geht von der Grundidee des Zusammenhangs zwischen Eigenwerten und stehenden Wellen aus. Hierbei stellen wir uns - ausgehend von der Vorstellung kugelsymmetrischer stehender Schallwellen in einer Glaskugel - vor, daß im Nullpunkt der Kugel immer ein Knoten<sup>9</sup> und im Zustand  $n$  auch  $n$  Bäuche zwischen Mittelpunkt und "Rand"  $R_n$  des Atoms liegen. Die entsprechenden Knoten haben näherungsweise den Abstand  $\bar{\lambda}_n/2$ . Da diese Wellenlänge wegen ihrer Abhängigkeit vom Potential (siehe oben) nicht konstant ist, sondern von innen nach außen zunimmt, nehmen wir eine mittlere Wellenlänge und kommen zu folgender Ausgangsgleichung:

$$n \frac{\bar{\lambda}_n}{2} = R_n \quad \dots (4)$$

Nun schätzen wir den Atomradius  $R_n$  durch denjenigen Radius ab, bei dem die Gesamtenergie vollständig als potentielle Energie vorliegt. Klassisch ist hier die kinetische Energie null, weiter nach außen kann das Elektron klassisch nicht kommen. Wellenmechanisch ist an diesem Punkt  $\psi' = 0$ , die  $\psi$ -Funktion hat einen

---

<sup>9</sup> Dies legen die Untersuchungen von 3-dimensionalen stehenden Schallwellen in einer Kugel nahe.

Wendepunkt, der sinusartige Verlauf geht in den exponentiellen Verlauf über, der restliche Teil beschreibt das Eindringen der  $\psi$ -Funktion in den klassisch verbotenen Bereich, mit durchweg abnehmender Amplitude. Alle Maxima der  $\psi$ -Funktion liegen bei kleineren Radien, die Annahme dieses Wertes als näherungsweise Rand erscheint sinnvoll. In Gleichungen gilt also:

$$W_n = W_{\text{pot}}(R_n) = \frac{-e^2}{4\pi \epsilon_0 R_n}$$

$$R_n = \frac{-e^2}{4\pi \epsilon_0 W_n}$$

Als nächstes suchen wir eine Abschätzung der mittleren de Broglie-Wellenlänge  $\bar{\lambda}_n$  im Zustand  $n$ . Wir benutzen zunächst die de Broglie-Beziehung zur Übersetzung von klassischen Energie- und Impulsgrößen in die Wellengrößen der  $\psi$ -Funktion:

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{p}$$

Hierin berechnen wir klassisch den Impuls  $p$ :

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2m W_{\text{kin}}} = \sqrt{2m (W_{\text{ges}} - W_{\text{pot}})}$$

Hierin ist in unserem Falle

$$W_{\text{ges}} = W_n$$

und

$$W_{\text{pot}} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Die mittlere potentielle Energie, aus der wir die mittlere de Broglie-Wellenlänge erhalten, könnte durch Integration bestimmt werden. Eine brauchbare und besonders einfache Abschätzung für den Zustand  $n$  erhalten wir jedoch, wenn wir den Wert der potentiellen Energie beim halben maximalen Radius  $R_n$  nehmen:

$$\overline{W_{\text{pot}}(r)} = W_{\text{pot}}\left(\frac{R_n}{2}\right) = \frac{-e^2}{2\pi\epsilon_0 R_n} = 2 W_n$$

Daraus erhalten wir für die mittlere de Broglie-Wellenlänge:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{h}{\sqrt{2m(W_n - 2W_n)}} = \frac{h}{\sqrt{-2m W_n}}$$

Wenn wir nun gemäß der Ausgangsidee alles in Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir:



$$\frac{n}{2} \frac{h}{\sqrt{-2m W_n}} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 W_n} ,$$

$$\frac{n^2 h^2}{-8m W_n} = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 W_n^2}$$

$$W_n = \frac{-m e^4}{2\pi^2\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Die exakte Formel ergibt sich aus der Lösung der Schrödingergleichung für das H-Atom:

$$W_n = \frac{-m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} .$$

Die Näherung ergibt den richtigen Zusammenhang zu  $-1/n^2$  und zu allen physikalisch relevanten Größen. Insbesondere erlaubt sie auch die Angabe der praktisch wichtigen Form

$$W_n = W_1 \frac{1}{n^2} .$$

Der Zahlenfaktor von  $2^2$  weicht allerdings von dem richtigen Faktor 8 um mehr als 50% ab. Die Herleitung besitzt aber zweifellos den Vorteil, auf einer anschaulichen Vorstellung von der räumlichen Gestalt des H-Atoms - gegeben durch die Knotenflächen der  $\psi$ -Funktion - und der Verbindung zwischen Zuständen (Eigenwerten) und stehenden Wellen aufzubauen.

## 7. Zusammenfassung

Die entwickelte didaktische Konzeption plädiert für Anschaulichkeit im Bereich der Atomphysik bei vollständigem Verzicht auf das Bohrsche Atommodell. Das schwierigste Hindernis auf diesem Weg stellen nach den Ergebnissen von BETHGE (1988) die mit den Begriffen "Bewegung" und "Bahn" auf das engste verknüpften Erwartungen der Schüler (und Lehrer, Physiker) an Anschaulichkeit dar. Nach dem oben dargestellten Konzept muß aber nicht die Anschaulichkeit generell aufgegeben werden. Es muß "nur" die intuitive Verknüpfung von Anschauung mit "Bahn" und "Bewegung" des Elektrons aufgebrochen und durch anschauliche Vorstellungen über

Zustände, räumliche Formen und Größenvorstellungen sowie Energieniveaus ersetzt werden.

## Literatur

- BAYER, H.: Schülervorstellungen beim Übergang vom Bohrschen zum wellenmechanischen Atommodell. In: KUHN, W.(Hrsg.): Vorträge Physikertagung 1986 Giessen, 249-256 .
- BERG, A. , FISCHLER, H. , LICHTFELDT, M. , NITZSCHE, M. , RICHTER, B. , WALTHER, F.: Einführung in die Quantenphysik. In: Pädagogisches Zentrum, Berlin 1989.
- BETHGE, T.: Aspekte des Schülervorverständnisses zu grundlegenden Begriffen der Atomphysik. Dissertation, Universität Bremen 1988.
- BORMANN, M.: Das Schülervorverständnis zum Themenbereich "Modellvorstellungen zu Licht und Elektronen". In: KUHN, W.(Hrsg.): Vorträge Physikertagung 1987 Berlin, 475-481.
- BUNGE, M., KÁLNAY, A.: Welches sind die Besonderheiten der Quantenphysik gegenüber der klassischen Physik? In: HALLER, R., GÖTSCHL, J. (Hrsg.): Philosophie und Physik. Braunschweig: Vieweg 1975, S.25-38.
- CASSENS, H.: Anwendungen zum Potentialtopfkzept- polare und unpolare Atombindung. In: KUHN, W.(Hrsg.): Vorträge Physikertagung 1990, Universität Giessen.
- COURANT, R., HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer 1968.
- DORN BADER: Physik Oberstufe A. Hannover:Schroedel 1977
- ECKHARDT, H.: Aufbau und Struktur der Atomhülle - Periodensystem und Bindung. Stuttgart: Klett 1982.
- FISCHLER, H.: Quantenphysik in der Schule I: Tendenzen der didaktischen Diskussion und Aufgaben der Fachdidaktik. In: physica didactica 16, (1989) 1, S. 21-34 .
- FISCHLER, H. , LICHTFELDT, M.: Quantenphysik in der Schule II: Eine neue Konzeption und ihre Evaluation. In: physica didactica 17 (1990) 1, S.33-51 .
- GROSS BERHAG : Atome - Kerne - Quanten. Stuttgart: Klett 1987.
- KOPPELMANN, G. , HENSEL, N. , WIESE, N. : Von Bohrschen Bahnen zu den Orbitalen (Eine Einführung mit Modellversuchen und Anschauungshilfen). In: SCHARMANN, A., HOFSTAETTER, A., KUHN, W.(Hrsg.): DPG Vorträge der Frühjahrstagung 1981, Universität Giessen, 637-643.
- NIEDDERER, H., SCHECKER, H.: Ziele und Methodik eines wissenschaftstheoretisch orientierten Physikunterrichts. In: Der Physikunterricht, 16 (1/1982), 58-71
- NIEDDERER, H.: Mechanische Analogieexperimente für Wellenfunktionen in verschiedenen Potentialtöpfen. In: SCHARMANN, A., HOFSTAETTER, A., KUHN, W. (Hrsg.): Vorträge auf der Physikertagung 1983, Universität Gießen, S. 516-524.
- NIEDDERER, H.: Stehende Seilwellen mit variabler Massendichte zur eindimensionalen Simulation der  $\psi$ -Funktion im H-Atom. In: Der Physikunterricht 15 (1984) 1, S. 64-68 .

- NIEDDERER, H.: Die chemische Bindung im  $H_2^+$ -Molekül - veranschaulicht und berechnet mit zwei einfachen Potentialtopfmodellen. In: KUHN, W.(Hrsg.): Vorträge Physikertagung 1987 Berlin, Universität Giessen, S. 564-578 .
- NIEDDERER, H., BETHGE, T. & CASSENS, H. : A Simplified Quantum Model: A Teaching Approach and Evaluation of Understanding. In: LIJNSE, P.L., LICHT, P. , DE VOS, W. & WAARLO, A.J. (Eds.): Relating Macroscopic Phenomena to Microscopic Particles - A Central Problem in Secondary Science Education. Utrecht 1990: CD-β Press, S. 67-80.
- NIEDDERER, H.: Atomphysik mit anschaulichem Quantenmodell. In: KUHN, W.(Hrsg.): Vorträge Physikertagung 1990, Universität Giessen.
- NIEDDERER, H.: Eine Unterrichtsfallstudie zur Atomphysik. In: WIESNER, H. (Hrsg.): Aufsätze zur Didaktik der Physik II. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1991.
- NIEDDERER, H., BETHGE, T., SCHECKER, H.: Abschlußbericht des Modellversuchs "Computereinsatz im Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe (CPU)" - Band 1: Didaktische Rahmenkonzeption, Band 2: Materialien, Band 3: Das Bremer Interfacesystem, Band 4: Ergebnisse der wissenschaftlichen Begleitung. Universität Bremen 1992.
- SCHECKER, H.: Einführung in die Quantenphysik des Elektrons in einem Grundkurs 13. Zweite Staatsexamensarbeit, Bremen 1986
- SCHREINER, J.: Anschauliche Quantenmechanik. Frankfurt am Main: Diesterweg, Salle, Sauerländer 1978.
- SCHRÖDINGER, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. In: Annalen der Physik 79 (1926) 361.
- McWEENEY, R.: Coulsons chemische Bindung. Stuttgart: Hirzel 1984