Schriftliche Hausarbeit zu Prüfung
für das Lehramt an Gymnasien

Thema der Arbeit:

Klangfiguren nach E. F. F. Chladni: Nachvollzug der Experimente und physikalische Analysen

Beurteilender Hochschullehrer:	Falk Rieß
Zweitgutachter:	Peter Heering
Ort, Datum:	Oldenburg, den 14. April 2009
Name des Kandidaten:	Andreas Henke

Inhalt

Inhalt 3

Vorwort 5

Ernst Florens Friedrich Chladni 6

Nomadentum und Wissenschaft? 17

Der Blick zurück - Konzepte der Akustik vor Chladni 25

Steinzeit, Altertum und Antike 26
Vom frühen Mittelalter bis Newton 30
Mechanik + Mathematik = Akustik ? 37

Physikalische Grundlagen der Klangfiguren 40

Varianten der Erzeugung von Klangfiguren 40
Erzwungene Schwingungen, Eigenfrequenzen und Resonanz 42
Zur Rolle der Eigenfrequenzen 43
Die Theorie der Flächenschwingungen 45
Eigenfunktionen einer Membran 45
Die kirchhoffsche Plattentheorie 49

Klangfiguren - Nachvollzug einiger Experimente 52

Analyse des historisches Vorgehens 52
Zu den Eigenschaften der Platten 52
Zur Erzeugung der Klangfiguren: 54
Auswertung der Ergebnisse durch Chladni 57
Durchführung der Experimente 64
Versuche mit fixierten Platten und Freihandversuche 64
Versuche an aufgelegten Platten 76
Versuche unter Verwendung einer Halteklammer 83
Analyse einiger physikalischer Aussagen Chladnis 89

Abschließende Bemerkungen 93

Quellenangaben 96

Literatur 96

Internet 99

Abbildungsverzeichnis 100

Vorwort

Die vorliegende Arbeit gibt einen Einblick in Leben und Werk des deutschen Naturwissenschaftlers Ernst Florens Friedrich Chladni. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Nachvollzug seiner Experimente zu Klangfiguren auf Metall- und Glasscheiben sowie einer Darlegung der dabei gewonnenen Ergebnisse.
Es wird eine Einführung in die Mathematik der Klangfiguren gegeben sowie eine Darlegung der Konzepte der Akustik vor Chladni. Weiterhin wird untersucht, wie und ob sich die nomadische Lebensweise dieses Mannes vereinbaren lässt mit seiner Reputation als geschätzter Wissenschaftler.

Ernst Florens Friedrich Chladni

Ernst Florens Friedrich Chladni wurde am 30.11.1756 als Sohn von Ernst Martin Chladni und Johanna Sophia Chladni ehem. Clement geboren. In der Tradition des Großvaters und des Vaters blieb der Nachname in seiner latinisierten Form „Chladenius“ bis zu seiner Dissertation erhalten. Dies war zu dieser Zeit nicht unüblich und lässt sich in diesem Fall einerseits durch die geistliche Tradition des Großvaters, eines evangelischen Predigers, und andererseits durch die Stellung des Vaters zunächst als Jurist und später als kursächsischer Hofrat und erster Professor der Rechte an der Universität Wittenberg erklären.
Chladni wuchs als Einzelkind auf, seine später geborene Schwester starb schon 1759 im Alter von 5 Monaten. Er verlor zudem seine Mutter im Alter von 5 Jahren, so dass er von dort an allein unter der Obhut seines Vaters stand, was seinen Charakter merklich prägen sollte. Martin Chladni sah für seinen Sohn von Anfang nichts anderes als eine Karriere in den Rechtswissenschaften voraus (und rückte auch bis zu seinem Tod 1782 von dieser Einstellung nicht ab) und ließ ihn schon im Alter von einem Jahr als Student dieser Fachrichtung immatrikulieren.
Für Chladni bedeutete dies, dass seine gesamte Erziehung nach diesem Ziel hin ausgerichtet war und es äußerte sich so, dass er auf Anweisung des Vaters die längste Zeit seiner Jugend in seinem Elternhaus verbringen musste. Ins Freie durfte er nur bei gutem Wetter und dann auch nur in den Garten des Hauses - auf seinen Wegen in der Stadt, etwa zur Kirche oder Bibliothek, wurde er immer von Erwachsenen begleitet. Es war ihm nicht erlaubt Freunde einzuladen oder in seiner Freizeit ein Instrument zu erlernen - auch den Unterricht erhielt er zu Hause. Zu den Auswirkungen dieser Umstände auf sein späteres Leben schreibt Löwenfeld

> „Die Eigenbrödelei des Mannes, welcher trotz beständiger Reisen seiner Umwelt gegenüber krankhaft abschließendes Geheimnistuen liebte, wird hier vorbereitet“ ([1], S.119)

Ein Kommentar Chladnis in Rückschau auf seine eigene Kindheit findet sich bei Ullmann und zeigt zudem, wie sehr ihm daran lag, dass seine Beweggründe von allen verstanden wurden:

> „Schon damals fühlte ich, dass diese Beschränkung nicht nötig war […]; es ward auch dadurch ganz das Entgegengesetzte bewirkt, nämlich desto mehr Neigung zu einer Unabhängigkeit, bei welcher ich meine Verhältnisse und Beschäftigungen

selbst bestimmen könnte.“ ([2] , ...S.10)

Schon in jungen Jahren zeigte sich bei Chladni ein ausgeprägtes Interesse für Naturwissenschaften, speziell „Erd- und Himmelskunde“[1] und für Musik, so dass er sich wann immer es möglich war Bücher zu diesen Themen besorgen ließ und auch sonst den größten Teil seiner Freizeit mit Lesen verbrachte.
Im Jahr 1771 kam er dann auf die Landesschule in Grimma. Auch dort wurde weiter für eine sehr strenge Erziehung Sorge getragen. Er genoss nämlich nicht die üblichen Freiheiten seiner Mitschüler, sondern blieb dort als Externer. Diese wohnten zusammen mit den Lehrern und standen somit ständig unter deren Aufsicht. Zu Chladnis Unglück wurde er dem Konrektor der Schule zugeteilt, der sich „… durch Hypochondrie und durch ängstliche Gewissenhaftigkeit in allem, was er für Pflicht hielt […]“[2] auszeichnete.
Dort gelangte er wohl auch zum ersten Mal in engeren Kontakt zur Musik, denn der damalige Rektor der Schule war Johann Tobias Krebs, seinerseits Bruder von Johann Ludwig Krebs, dem bekannten deutschen Komponisten, Organisten und Schüler Johann Sebastian Bachs. So begann er denn auch, nachdem er dem Willen des Vaters folgte und im Jahre 1976 ein Jurastudium an der Universität Wittenberg anfing[3], das Klavierspielen zu erlernen. Lange konnte er die weiter anhaltende Bevormundung in seinem Elternhaus aber nicht aushalten und überredete schließlich (wohl um 1779) seinen Vater zur Erlaubnis eines Studienortwechsels nach Leipzig, wo er dann 1782 als Doktor der Philosophie und der Rechte sein Studium abschloss. Obwohl er während seiner Zeit in Leipzig oft die Gelegenheit gehabt haben dürfte, an den anerkannten physikalischen Vorlesungen teilzunehmen oder sich von der zu dieser Zeit sehr ausgeprägten musikalisch-kulturellen Einstellung Leipzigs anregen zu lassen, hatte er doch diese Freiheit, „wie jeder, der sich meiner erinnert, wird bezeugen können, […] auf keine Weise gemißbrauchet“[4].
Dass in diesem Jahr seiner Dissertation Chladnis Vater verstarb, mag auf den ersten Blick bedauerlich erscheinen, aber dieses Ereignis markiert die entscheidende Wende in Chladnis Leben. Erst jetzt hat er die völlige Freiheit, sich mit den Dingen zu befas-

[1] entsprechend der heutigen Disziplinen Geographie und Astronomie

[2] [10], S. XV

[3] Ursprünglich wollte Chladni Medizin studieren - dies war der damals übliche Einstieg in eine Karriere als Naturphilosoph/Physiker bzw. Mathematiker und auch eine der wenigen Möglichkeiten, nebenbei Geld zu verdienen

[4] [10], ebd.

sen, die ihn ohnehin seit seiner Kindheit beschäftigten und wandte sich den Naturwissenschaften, und dabei im Besonderen der Akustik, zu[5].

Nach dem Tod des Vaters zurück in Witterberg war Chladnis finanzielle Lage entsprechend schlecht[6]. So begann er Vorlesungen an der juristischen und philosophischen Fakultät zu halten, da sich die Hoffnung auf die Stelle als zweiter mathematischer Professor in Wittenberg nicht erfüllte[7] - diese Stelle wurde nicht wiederbesetzt. Dies war wohl einzig dem Umstand geschuldet, dass er nur hierfür die nötigen Qualifikationen mitbrachte. Die Themen seiner Vorlesungen beinhalteten daher neben einigen wenigen juristischen Inhalten hauptsächlich die Gebiete Geometrie, Geographie, Mechanik und Musik. In seiner freien Zeit begann er mit dem Experimentieren an Stäben und Platten aus verschiedenen Materialien, hauptsächlich aus Metall und Glas. Dieses Feld, so erschließt sich gleich zu Beginn der Einleitung zu seinem Erstlingswerk von 1787 „Entdeckungen über die Theorie des Klanges“, hat er sich mit Bedacht ausgesucht, denn „die wahre Beschaffenheit des Klanges solcher Körper, bey denen elastische Krümmungen ganzer Flächen […] in Betrachtung kommen, [ist] noch in die tiefste Dunkelheit gehüllt; indem weder Berechnungen, die mit der Erfahrung übereinstimmen[8], noch richtige Beobachtungen darüber vorhanden sind“. Diese Aussage trifft er keineswegs aus Unkenntnis, denn es zeigt sich in den Entdeckungen, dass er sich durch die Lektüre der Werke unter anderem von Daniel Bernoulli, Euler, Riccati und de la Hire auf dem letztmöglichen Stand der Mechanik und Akustik hielt.

Die Experimente, deren Ergebnisse einen Großteil des Inhalts der Entdeckungen ausmachen, liefen wohl so ab, dass Chladni Saiten, aber auch Stäbe und runde, rechteckige oder quadratische Platten mit einem Geigenbogen an verschiedenen Stellen anstrich, nachdem er sie zuvor mit feinem Sand bestreut hatte. Je nachdem wo dieser Gegenstand nun festgehalten wurde, entstanden Muster in dem Sand, welche die Knotenlinien der angeregten Schwingung anzeigten[9] - diese Figuren sind heute noch

---

[5] vgl. [1], S. 120

[6] er schreibt dazu in [10], S.XVII: *„Vermögen besaß ich nicht, indem die von Vielen gemißbrauchte Wohlthätigkeit meines Vaters ihm nicht verstattet hatte, von seiner sehr guten Einnahme etwas zurückzulegen“*

[7] vgl. [12], S.10

[8] Er bezieht sich hier auf die falschen Vorhersagen für die Eigenfrequenzen einer freien quadratischen Platte, die Jakob II. Bernoulli in einem Werk von 1786 trifft.

[9] Chladni selbst gibt dafür die einfache Erklärung, dass der Sand an den stark schwingenden Stellen weggeschleudert wird, während er sich an den Knotenlinien anhäuft. Weitergehende Untersuchungen zum Verhalten von Sand auf schwingenden Oberflächen macht erst Faraday in seinem Werk von 1831:

allgemein als „Chladnische Klangfiguren“ bekannt.

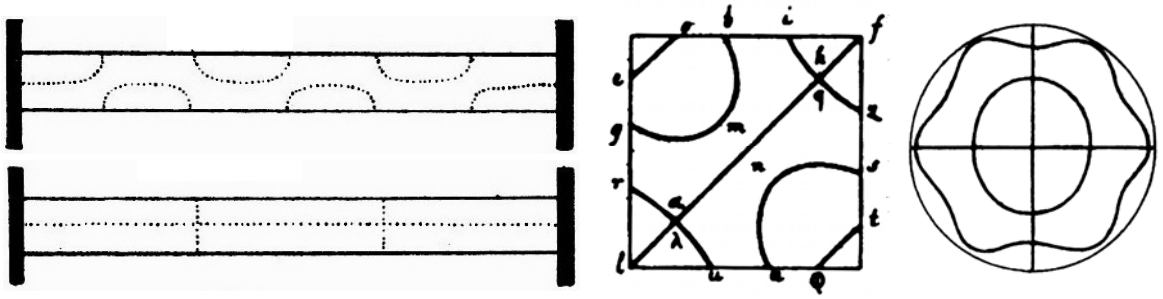


Abb. 1: Klangfiguren auf Stäben (links) und auf Platten (rechts)

Seine Hauptaufgabe sah er darin, die auftretenden Muster zu kategorisieren und mit den zugehörigen Tönen in Verbindung zu bringen. Es gelang ihm, zumindest bei reisförmigen Scheiben, zu zeigen, dass die Frequenz f einer Schwingung proportional ist zu den dabei auftretenden Anzahlen von Knotenkreisen K und Linien L durch den Mittelpunkt. Sein Ergebnis lautet demnach:

(1) $$f \propto (2K + L)^2$$

Während die Untersuchungen an Saiten und elastischen Stäben eher den Charakter einer experimentellen Überprüfung der mathematischen Ergebnisse von Euler und Riccati, aber insbesondere der von Daniel Bernoulli haben, sind seine Untersuchungen zu Flächenschwingungen etwas völlig Neues. Wie schon erwähnt wusste Chladni um die letzten Fortschritte auch der Mathematik, die zu einem großen Teil Euler zu verdanken sind, und hoffte, seine Untersuchungen könnten als Unterstützung dienen auf dem Weg zu einer mathematischen Lösung dieser neuen Klasse von Problemen[10].

Vielleicht weniger bekannt sind Chladnis Bemerkungen zu einer neuen Schwingungsart, der er bei seinen Experimenten an Stäben und Saiten begegnete. Es zeigt sich später, dass er damit als Erster die sog. Longitudinalschwingungen[11] als solche erkannte und in seiner Akustik, die 1802 erscheinen wird, zu großem Nutzen brin-

---

On a peculiar class of Acoustical Figure; and on certain Forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic Surfaces

[10] dazu schreibt er „*Vielleicht können die obigen Bemerkungen […] Anlaß geben, um […] die Theorie der Krümmungen einer Fläche […] mehr zu bearbeiten […] indem doch nun mehrere Voraussetzungen zu deren Berechnung und mehrere Mittel, um die Richtigkeit derselben durch Versuche zu prüfen, vorhanden sind*“ [9], *Entdeckungen*, S. 77

[11] das sind in erster Näherung - und in Chladnis Fall stehende - Dichtewellen in Längsrichtung des Stabes oder der Saite

gen wird. Einige andere Bemerkungen[12] lassen zudem darauf schließen, dass er hier schon auf Torsionsschwingungen gestoßen ist, ohne sich dessen bewusst zu sein.
Chladnis weiterhin schlechte finanzielle Lage brachte ihn wohl dazu, Gastvorlesungen und Vorträge über akustische Themen zu halten, wobei die Präsentation seiner Klangfiguren als etwas bis dato Unbekanntes mit einem eigenen ästhetischen Reiz sicherlich half, die Vorlesungssäle zu füllen. Vorerst war er aber noch beschäftigt mit der Entwicklung eines eigenen Instruments, welches direkt auf seinen Untersuchungen an Stäben aufbauen sollte. Inspiriert zum Bau hat ihn eine sich zu dieser Zeit großer Beliebtheit erfreuende Glasharmonika, bei welcher gestrichene Glasschalen die Klangkörper bilden. Er taufte seine 1790 fertig gestellte Erfindung „Euphon“[13] (s. Abb. 2) und machte sich kurz darauf im Jahre 1791 mit einem speziell für die Aufnahme des Euphons konstruierten Reisewagen auf die Reise. Damit begann wohl seine Tätigkeit als reisender Gelehrter und Forscher, der - bis zu seinem Lebensende - nie lange an einem Ort verweilen konnte und die ihm den Ruf eines „Nomaden der Wissenschaft“ einbrachte[14].

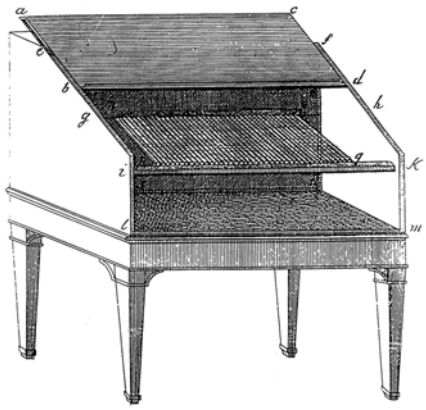


Abb. 2: Chladnis Euphon

So traf er im Jahr 1792 in Göttingen auf den Naturwissenschaftler Georg Christoph Lichtenberg. Der hatte mit seiner Entdeckungen und Darstellung der später nach ihm benannten Lichtenbergschen Figuren[15] Chladni die Idee geliefert, seine Klangfiguren sichtbar zu machen. Jetzt ging es aber um ein ganz anderes Thema, welches zu dieser Zeit die wissenschaftliche Gemeinde bewegte: die Frage nach der Herkunft der Meteorite, auch „Feuerkugeln“ oder „meteorische Massen“ genannt. Obwohl Lichtenberg - beeinflusst durch seine eigenen Forschungen - die Hypothese vertrat, dass diese auf irgendeine Art durch elektrische Phänomene entstehen, warf er gegenüber Chladni ein, „die Feuerkugeln möchten wohl etwas nicht Tellurisches, sondern Kosmisches

[12] [9], *Entdeckungen,* S. 75f

[13] aus dem Griechischen für „wohlklingend“

[14] Über seine Reisetätigkeit und seine Vorführungen soll an anderer Stelle noch genaueres gesagt werden, daher beschränke ich mich im Folgenden auf die Nennung der im Rückblick wichtigsten Ereignisse aus Chladnis Leben.

[15] Figuren, die bei elektrischen Entladungen auf einer z.B. mit Harzpuder bestäubten Platte aus einem Dielektrikum sichtbar werden - mehr dazu und zu seiner Person auch auf der Homepage der Lichtenberg-Gesellschaft: *www.lichtenberg-gesellschaft.de*

sein […]“[16]. Aufgrund dieser Äußerung vertiefte sich Chladni in diese Fragestellung und veröffentlichte 1794 die Schrift „Über den Ursprung der von Pallas gefundenen und anderer ihr ähnlichen Eisenmassen, und über einige damit in Verbindung stehende Naturerscheinungen“, in der er den heutzutage selbstverständlichen Zusammenhang zwischen den Erscheinungen am Himmel und den gefundenen Massen herstellte und das All als Ursprung ausmachte[17]. Dass niemand zuvor diese Verbindungen gezogen hatte, führt Chladni darauf zurück, “dass viele Naturforscher gern Naturerscheinungen aus dem erklären, womit sie sich sehr beschäftigt haben“[18].

Nach einer sehr erfolgreichen Vortragsreihe in Hamburg 1793 war Chladni mittlerweile in Petersburg angekommen, einerseits um das titelgebende (s.o.) Pallas-Eisen, welches dort ausgestellt war, zu begutachten und andererseits um vor der dortigen Akademie der Wissenschaften, der er sein Erstlingswerk gewidmet hatte, einen akustischen Vortrag zu halten und sein Euphon vorzustellen. Aus Dank und Anerkennung wurde er als Mitglied der Akademie aufgenommen.

In der Zeit zwischen 1794 und 1799, während seiner Aufenthalte in Berlin, Wien und Kopenhagen, führte Chladni vertiefende Untersuchungen zu den Longitudinalschwingungen (1796) und Torsionsschwingungen (1799) durch, deren Ergebnisse er in der jeweiligen Stadt auch veröffentlichen ließ.

In der gleichen Zeit arbeitet er immer wieder an der Verbesserung des Euphons, denn er war der Meinung,

> „[…] die gewöhnlichen Instrumente, welche mit Tasten gespielt werden, haben die Unvollkommenheit, dass man die Töne nicht, so lange sie eigentlich dauern sollen, mit anwachsender, gleich bleibender oder abnehmender Stärke fortdauern lassen kann […]“ [10], S. XV

[16] [12], S.7f, Dieses Gespräch fand im Februar 1793 statt

[17] Lichtenbergs erste Reaktion auf diese Schrift fiel dann doch sehr zurückhaltend aus, wie sich Chladni später in [14], S7f erinnert: „Es sey ihm […] anfangs so zu Muthe gewesen, als wenn ihm selbst ein solcher Stein am Kopf getroffen hätte“. Vielleicht war er sich der Tragweite der Behauptung und der ablehnenden Reaktionen vieler Gelehrter bewusst und hätte Chladni ein solches Schicksal lieber erspart, denn er schreibt, es wäre vielleicht „[…] besser gewesen, er hätte diese Schrift nicht verfasst“

[18] [12], S. 56

Das völlig umgebaute Instrument stellte er 1800 fertig und gab ihm den Namen „Clavizylinder“ (s. Abb. 3). Auch hier basiert die Tonerzeugung auf Longitudinalschwingungen von Stäben, die aber nicht wie beim Euphon mit den Fingern gerieben werden müssen, sondern, mit einem Stück Tuch an einem Ende versehen, gegen einen sich drehenden, feuchten Glaszylinder zu drücken sind. Damit war er zu spielen wie die meisten Tasteninstrumente, mit dem Vorteil der Unverstimmbarkeit und den von Chladni geforderten Eigenschaften (s.o.).

Abb. 3: Chladnis Clavizylinder

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass Chladni seine Musikinstrumente wie auch seine physikalischen Apparaturen komplett selbst entwarf und baute, wobei er sich nur die Einzelteile wie Glas- und Metallstäbe und größere Holzteile anfertigen ließ.

Nach der Fertigstellung vergingen noch 2 Jahre, die Chladni mit Nachforschungen und Versuchen zubrachte, bis in Leipzig im Jahr 1802 sein Hauptwerk mit dem Titel „Die Akustik“ erschien. Dieses über 300 Seiten umfassende Werk enthält die wohl erste strukturierte Übersicht[19] über die „Theorie der Akustik und der dabei vorkommenden Hauptsätze, nach den neuesten Untersuchungen und Entdeckungen“. So lautete der Titel der zugrunde liegenden Preisaufgabe, zu dessen Vergabe Chladni schon 1797 einen Vorschlag einreichte, aufgrund dessen er den Zuspruch erhielt. Auch wenn das Kapitel zu Flächenschwingungen darin einen vergleichsweise großen Raum einnimmt (80 S.), werden doch nahezu alle derzeit bekannten Gebiete und Phänomene der Akustik kurz, verständlich und fast immer mit experimentellen Ergebnissen verglichen dargestellt. Angefangen mit den mathematischen Grundlagen des Tonsystems geht es weiter mit Betrachtungen zu elastischen Schwingungen von Saiten, Stäben, Membranen und Flächen im Allgemeinen. Darauf folgt ein Teil über die Schallausbreitung in verschiedenen Medien mit spezieller Berücksichtigung der Schallgeschwindigkeit. Das Werk enthält auch ein Kapitel über die Schallaufnahme bei Mensch und Tier inklusive anatomischer Betrachtungen.

Dass Chladni in dieser verhältnismäßig kurzen Zeit all dieses Wissen aus so verschiedenen Quellen so übersichtlich zusammentragen konnte, verdankt sich grund-

[19] der von *Thomas Young* im Jahr 1800 verfasste Aufsatz *Theory of Sound and Light* hatte ähnliches zum Ziel, umfasste aber bei weitem nicht alle in der *Akustik* angesprochenen Gebiete, vgl. [19], S.3f

sätzlich eben jener Reisetätigkeit, bei der er unablässig die Bibliotheken nach den neuesten wissenschaftlichen Artikeln durchforschte, aber auch der „besondere[n] Gabe, […] die umfangreichsten Werke mit der grössten Geschwindigkeit zu durchlaufen, und dabei alles ihn Interessirende sehr genau herauszufinden […]“[20]
Noch gegen Ende dieses Jahres brach Chladni wieder auf, um verschiedene Wissenschaftler aufzusuchen und seine Vortragstätigkeit weiterzuführen. Diese zweite Reiseperiode dauerte bis ca. 1812 und ließ ihn Anfang 1803 in Weimar auf Goethe treffen, der sich nach der Lektüre der Akustik und nach Gesprächen über akustische Themen recht positiv äußert[21]. Später wird dieser über Chladni folgendes schreiben:

> „Dank ist ihm die Welt schuldig, dass er den Klang allen Körpern auf jede Weise zu entlocken, zuletzt sichtbar zu machen verstanden. […] ein geistreicher, aufmerkender Mann [, der] zwei der entferntesten Naturvorkommenheiten seiner Betrachtung aufgedrungen fühlt und nun eines wie das andere stetig und unablässig verfolgt.“ [1], S.122

Der Krieg zwischen den preußischen und französischen Truppen verschlechterte die Lage der Zivilbevölkerung in den folgenden Jahren weiter und so reiste Chladni ab 1806 Richtung Frankreich und traf 2 Jahre später in Paris ein. Die Lage der Wissenschaften hatte sich dort erheblich verbessert und die seinerzeit besten Physiker und Mathematiker hielten sich dort auf, so dass Chladni sich auch recht schnell daran machte, seine Arbeiten und sein Instrument (er hatte den Clavizylinder mitgenommen) begutachten zu lassen. Schnell wurde die Forderung laut, die *Akustik* solle ins Französische übersetzt werden. Für eine entsprechende Bezahlung erklärte sich Chladni dazu bereit und erhielt daraufhin durch Empfehlung von Berthollet, Laplace und Lacépède die Möglichkeit einer Audienz bei Napoleon. Die Darbietungen beeindruckten Napoleon sehr, der sich in den Naturwissenschaften stets dem Laufenden halten ließ. Am Folgetag erfüllte er die Bitte nach Unterstützung, indem er Chladni eine Anweisung über 6000 Franc überbringen ließ. „Dieser Mann lässt Töne sehen“[22] ist ein berühmtes Zitat Napoleons vor dem Institut de France und markiert aus heutiger Sicht den Höhepunkt von Chladnis Laufbahn.
Napoleon war sich zudem bewusst, dass es noch keine mathematisch schlüssige Beschreibung von Flächenschwingungen gab. Aus diesem Grund ließ er das Institut darauf einen Preis von 3000 Franc aussetzen ließ. Die Meldefrist für das Preisaus-

[20] [3], S.189

[21] [1], S.122

[22] eine ungenaue mündliche Überlieferung, oft auch übersetzt mit *„Der Chladni lässt uns Töne sehen“*

schreiben musste übrigens zweimal verlängert werden, bis im Jahr 1816 die Mathematikerin Sophie Germaine die Auszeichnung für eine - beinahe korrekte - Lösung erhielt.

Die Übersetzung der Akustik dauerte bis zum Jahr 1809 und schon im Folgejahr brach Chladni erneut auf. Die Hauptstationen dieser letzten längeren Reise waren Zürich, wo er wieder seine bekannten Vorträge hielt und von wo aus er ausgedehnte Wanderreisen unternahm, und Genf, zu dem er bemerkt, dass man „dort […] sehr wenig Notiz von mir und meinen Erfindungen“[23] nahm. Von hier aus ging es weiter nach Turin, wo er 6 Monate verweilte, um dann über einige Städte in Norditalien, darunter Mailand, Venedig und Florenz, im Jahr 1812 nach Deutschland zurückzukehren. Ruhige Zeiten waren auch dann noch nicht angebrochen, denn der Rückzug eines Teils des französischen Heeres aus Russland in die Festung Wittenberg führte zu dessen Bombardierung und der Zerstörung von Chladnis Wohnung. Dieser hatte sich glücklicherweise schon vorher im nahe gelegenen Örtchen Kemberg ein Zimmer angemietet und den Großteil seiner Habe dorthin bringen lassen.

Die Zeit bis zum Jahr 1815 verbrachte Chladni wohl an der Vervollständigung seiner *Neuen Beyträge*, welche 2 Jahre später erscheinen sollten. Die 4 folgenden Jahre wandte er sich stärker seinem zweiten Steckenpferd, der Meteoritenkunde, zu. Er studierte viele Mineraliensammlungen und verfolgte das Ziel, eine Auflistung aller dokumentierten Meteoritenfälle und -beobachtungen zu erstellen, um die Theorien aus seinem ersten diesbezüglichen Werk weiter untermauern zu können. Dies wäre in dem Umfang eigentlich nicht mehr nötig gewesen, denn die Kritik an seiner Idee war bis auf wenige Ausnahmen verstummt - nicht zuletzt Dank des aktiven Wirkens befreundeter Wissenschaftler in Frankreich, Deutschland und Österreich. Dort, genauer gesagt in Wien, erschien 1819 auch das Resultat jener Arbeit: der Band *Ueber Feuer-Meteore und über die mit denselben herabgefallenen Massen* ([14]).

Chladni, mittlerweile 63 Jahre alt, ließ dann 1821 ein weiteres Werk über die Akustik folgen, die *Beyträge zur praktischen Akustik und zur Lehre vom Instrumentbau*. Darin gibt er unter anderem alle zum Nachbau seiner Instrumente nötigen Informationen, welche er zuvor stets unter Verschluss halten musste, da der Reiz seiner Vorführungen immer auch darin bestand, den Klang dieser raren Instrumente hören zu dürfen. Dies war nun nicht mehr nötig, denn:

„Durch die Aufnahme des Meteoritenthemas in sein Vortragsprogramm war er nicht

[23] [4], S. 46

> mehr ausschließlich auf die Darbietungen mit seinen Instrumenten angewiesen. 1820 war auch schon der Höhepunkt der Beliebtheit dieser Friktionsinstrumente vorüber, die eine ausgesprochene Modeerscheinung waren.“ ([2], S. 60)

Außerdem stand es finanziell um Chladni nicht ganz so schlecht, wie es der Arzt und Astronom Wilhelm Olbers 1824 in einem Brief an Carl Friedrich Gauß bemerkt.[24] Weber schreibt dazu nämlich folgendes:

> „[Chladni] glaubte vielmehr, in einer vorzüglichen Lage zu sein. In seinem Alter besaß er so viel, dass er von seinen Interessen […] sogar reichlich hätte auskommen können.“ ([3], S. 196)

Es muss also an Chladnis Ruhelosigkeit und seinem Wissensdrang, den er ja in möglichst verschiedenen Bibliotheken zu befriedigen versuchte, gelegen haben, dass er bis ins hohe Altern nicht hat von Reisen lassen wollen oder können. Diese hatten nach 1822 laut Bernhard „fast immer nur den Zweck, denen, welche sich mit dem Bau seiner Instrumente abgaben, mit Rath und That beizustehn“[25].
1825 veröffentlichten die Gebrüder Weber ihre *Wellenlehre*, in der erstmals die Ausbreitung von Wellen auf Flüssigkeiten und die von Schall und Licht genauer untersucht und geschlossen dargestellt wurde. Chladni, der den jüngeren der beiden, Wilhelm Weber, schon von dessen Kindheit an kannte und unterstützte, sah dies als Zeichen, seine bisherigen akustischen Erkenntnisse unter diesem neuen Licht noch einmal zusammenzufassen und in einem kurzen Werk darzustellen. *Diese Kurze Übersicht der Schall- und Klanglehre* erschien allerdings erst posthum, denn am 3. April des Jahres 1827 verstarb Chladni in seiner Unterkunft in Breslau im Alter von 71 Jahren infolge eines Schlaganfalls. Den Abend zuvor nahm er noch an einer gut besuchten Abendgesellschaft teil, welche der Naturphilosoph und Dichter Henrik Steffens für ihn veranstaltet hatte.
Im letzten Jahr vor seiner Reise nach Breslau wandte sich Chladni, beeinflusst durch die o. g. Schrift Webers, noch einmal näher einem Spezialgebiet innerhalb der Akustik zu: Er verfasste einige kurze Schriften über die Raumakustik und hatte das Glück, noch im Januar 1827 den Klang des grade fertig gestellten Saals der Singakademie zu Berlin zu bewundern. Wäre es ihm vergönnt gewesen, hätte er wohl auch auf diesem Gebiet noch einiges leisten können, wie die ersten Ansätze dazu in seiner *Akustik* belegen.

---

[24] Schilling, C. (Hrsg.): Wilhelm Olbers : sein Leben und seine Werke, Bd. 2: Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss, Berlin 1909, S. 321

[25] [4], S. 93

Bezüglich seines Todes existieren zwei (romantisch verklärte) Anekdoten, deren Wahrheit heute unmöglich zu überprüfen ist. Zum einen soll Chladni noch an jenem Abend geschildert haben, wie er sich einen beneidenswerten Tod vorstellte - und diese Schilderung wich nur unbedeutend von dem Verlauf der Ereignisse ab, wie Steffens sie beschreibt. Zum anderen gibt es Berichte eines Musikdirektors und guten Bekannten Chladnis aus Wittenberg, nach denen zeitgleich mit Chladnis Tod angeblich ein Bildnis desselben zu Bruch ging, welches der Musikdirektor in seinem Zimmer hängen hatte.

Nomadentum und Wissenschaft?

In diesem Kapitel möchte ich Chladnis nomadischen, von Vortrags- und Bildungsreisen geprägten Lebenslauf aus wissenschaftshistorischer Perspektive beleuchten und die These aufstellen, dass dieser unter bestimmten Gesichtspunkten einen Anachronismus darstellt, dass sich also seine Art zu leben und zu forschen in seiner Zeit schon überlebt hatte. Dabei wird sich zeigen, dass Chladnis Ansehen und Erfolg als Physiker keineswegs ein vorgezeichneter Weg war, sondern unter Einbeziehung o. g. Tatsachen einer Legitimierung bedarf.
Man muss dazu wissen, dass der Anfang des 18. Jahrhundert gekennzeichnet war vor einem erstarkten Interesse an elektrischen Phänomenen. Dies galt sowohl für die Gelehrten und Forscher als auch für „gemeinen" Bevölkerungsschichten, wobei sich diese scharfe Trennung in der Realität häufig nicht durchführen ließ: Zu jener Zeit wurde Forschung oft unter den Aspekten Hobby, Nebenverdienst oder Prestige durchgeführt. Die Vorstellung einer *scientific community* mit (relativ) klaren Regeln für den Erkenntnisgewinn und einem kohärenten, idealtypischen Bild des Wissenschaftlers, welches deren Mitglieder anzustreben bemüht sind, existierte noch nicht. Ganz zu schweigen von einem diesbezüglichen Berufsstand.
Hochadel vertritt in seinem Buch nun die These, dass mit der Elektrizität als Modewissenschaft ganz eigentümliche Persönlichkeiten auf den Plan traten, die es möglich machten, die Legitimation und das Selbstverständnis der Wissenschaft durch Abgrenzung zu schärfen. Dazu schreibt er:

> Welche Eigenschaften und Fähigkeiten werden ihm [dem Wissenschaftler, d.A.] zugeschrieben, die er anderen Praktikern der Naturkunde voraus hat? […] Welche Verhaltensweisen und Eigenarten disqualifizieren einen Praktiker als Wissenschaftler. […] Es geht […] um die Rekonstruktion eines Normbildungsprozesses ex negativo. ([46], S. 275)

Zu diesen Persönlichkeiten - den „anderen Praktikern der Naturkunde" - gehören hauptsächlich die herumreisenden Elektrisierer, die als wissenschaftliche Schausteller davon lebten, dass sie auf Marktplätzen oder in Vorlesungssälen ihre Zuschauer durch das Vorführen elektrischer Phänomene in den Bann zu ziehen versuchten.
Die o. g. Abgrenzung, meist vorangetrieben von Professoren oder Mitgliedern wissenschaftlicher Akademien, erforderte notwendigerweise eine differenzierte Darle-

gung der Eigenheiten ihrer „Kollegen von der Landstraße“[26], die es als „echter“ Wissenschaftler zu verachten und zu meiden galt.

Wie lässt sich dieses Wissen auf Chladni anwenden? Indem man seinen Lebenslauf mit dem eines Elektrisierers vergleicht und herausfindet, dass sich viele Gemeinsamkeiten finden lassen - und das zu einer Zeit, als dieses Vorgehen schon „aus der Mode“ gekommen und somit fast völlig verschwunden war. Ich möchte im Folgenden Ähnlichkeiten und Unterschiede auf drei Ebenen untersuchen: der *formalen*, der *inhaltlich-methodischen* und der Ebene der *Persönlichkeitsmerkmale*. Dabei gehe ich davon aus, dass die Rezeption von Schausteller- oder Taschenspielermerkmalen bei Chladni zu einer Ablehnung oder Ausgrenzung durch andere Wissenschaftler führen müsste - diese kann auf vielerlei Arten erfolgen, meist aber durch abwertende Kommentare, die auf eben diese Unwissenschaftlichkeit und Scharlatanerie abzielen und seinen Ruf schädigen sollen. Umgekehrt sind lobende Kommentare nicht immer als solche zu werten, da sie vor dem Merkmalshintergrund eines Wissenschaftlers analysiert werden müssen. Damit Chladni als „einer der ihren“ gelten kann, bedarf es also auf jeder der genannten Ebenen etwas, das mit den konstituierenden Eigenschaften konform geht.

Zu Beginn muss man natürlich sicherstellen, ob Chladni von der scientific community tatsächlich als Wissenschaftler anerkannt war. Das lässt sich bewerkstelligen, indem man folgende Zitate heranzieht. Der Astronom Heinrich Wilhelm Olbers zum Beispiel lauscht gerne den „genialen Ideen des kühnen Physikers“[27] und Lichtenberg bewundert ihn als „Mann von tiefen Einsichten nicht blos in alles, was die Natur der Töne der Töne, sondern Physic überhaupt angeht“[28]. Es finden sich einige Zitate dieser Art, so dass an Chladnis Anerkennung kaum Zweifel besteht - gehen wir also dazu über, Chladnis formales Vorgehen unter dem Gesichtspunkt der Wissenschaftlichkeit zu durchleuchten, wobei ich mich im ersten Durchgang darauf beschränke, die „unwissenschaftlichen“ Eigenheiten hervorzuheben. In einem zweiten Schritt folgt dann die Relativierung.

Den Grad eines Professors erreicht Chladni nicht, er schließt sein Studium mit einer gängigen Kombination als Doktor der Rechte und der Philosophie ab. Außerdem besitzt er nur eine mangelhafte mathematische Ausbildung und eine Lehranstellung in Leipzig wird ihm, wenn auch aus anderen Gründen, versagt. Zudem ist es Chlad-

[26] [46], S. 273

[27] [8], S. 372

[28] [5], S. 104

nis Art, nicht ortsgebunden zu sein, also kein beständiges, eingerichtetes Labor zu besitzen und sein Instrumentarium mit sich zu führen. Er lässt sich sogar einen Reisewagen anfertigen speziell für die Aufnahme von Euphon oder Clavizylinder.
Leider finden sich über seine Arbeit während der Aufenthalte in Wittenberg und Kemberg keine Aufzeichnungen, aber es ist gut belegt, dass er viele seiner Erkenntnisse durch Experimente auf seinen Reisen gewann. Seine anfangs prekäre finanzielle Lage versucht er zu überwinden, indem er sein Geld auf Reisen primär durch Vorführungen verdient - bei dieser Art des Einkommens bleibt es auch.
Diese formalen Merkmale liefern aber schon einiges, was Chladni in die Nähe der Elektrisierer rückt und dies lässt sich bei seiner Methodik weiterführen. So bietet er seine Entdeckungen ganz öffentlich dar[29] und lässt diese Aufführungen als „Concert“ ankündigen, schließlich tritt er zugleich noch als Virtuose auf dem selbst erfundenen Instrument auf - eine sehr ungewöhnliche Verquickung von Wissenschaft und Kunst, die nicht überall auf Gegenliebe stößt. In Mannheim beispielsweise fühlt man sich genötigt, „ein […] mit geringer Kunst gespieltes Instrument […] anzuhören, und isolierte Experimente ohne erschöpfende Erklärung […] anzusehen.“[30]
Weiterhin sieht Goethe auch die Signifikanz von Chladnis Arbeit kritisch – zu Unrecht, wie wir heute wissen - , als er in einem Brief an Wilhelm von Humboldt bemerkt: „Durch ein abermals neuerfundenes Instrument [Clavizylinder, d.A.] introduciert er sich bei der Welt und macht sich seine Reise bezahlt; denn bei seinen übrigen Verdiensten um die Akustik könnte er zu Hause sitzen sich langweilen und darben“[31]. Damit spricht er das für dessen Anerkennung bedeutendste Dilemma Chladnis aus: Ortsgebunden und ohne Professorenstelle hätte er nie zu Geld kommen, nie Bekanntheit erlangen und dabei seinen Forschungen nachgehen können, wohingegen seine Lösung, sich „einerseits als musikalischer Virtuose, gleichzeitig aber als geschätzter Wissenschaftler“[32] überall bekannt zu machen die Gefahr barg, in eine Schublade mit den „Taschenspielern“ gesteckt zu werden.[33] Dies alles natürlich nur unter der Bedingung der selbst gewählten Forschertätigkeit. Schließlich hätte er - wie er auch selber anmerkt - „ordentlicher Professor der Rechte […] mit guten Einkünf-

[29] Hochadel erwähnt auch den (wenn auch seltenen) Fall des „Forschens vor Publikum“. Dabei werden z. T. abgewandelte Experimente mit ungewissem Ausgang durchgeführt, so dass die Zuschauer den Forscher „in Aktion“ erleben können. Davon gibt es bei Chladni keine Berichte.

[30] [2], S. 48

[31] [8], S. 371

[32] [1], S. 122

[33] Dass dies im Nachhinein dennoch als die beste Konsequenz erscheint, wird sich noch zeigen.

ten sein können“.

Seine Persönlichkeit und moralische Haltung bietet dagegen kaum Angriffsfläche, außer den Zweifeln an seiner Aufrichtigkeit, die es immer wieder gab (und gibt). Schließlich konnte weder damals noch heute wieder jemand annähernd so viele Klangfiguren hervorbringen wie Chladni, geschweige denn in der spezifischen Art und Weise, durch die er ihre zugehörigen Tonverhältnisse erst bestimmen konnte.

Fangen wir nun an in gleicher Reihenfolge auch die andere, diese Liste von Angriffen relativierende, Waagschale zu füllen.

Auch ohne Professorentitel muss Chladnis Vorgehen auf der formalen Ebene eindrucksvoll idealtypisch gewirkt haben. Nach langer Vorarbeit veröffentlicht er seine Werke, die allen Standards dieser Zeit genügen. Dass sie überhaupt gelesen werden, rührt daher, dass Chladni auf seinen Reisen immer den Kontakt zu Kollegen sucht und ihnen seine Schriften vorstellt, oft auch schenkt. In gleichem Maße lässt er kleinere Artikel in den regionalen „gelehrten Zeitschriften“ abdrucken, zeigt dadurch Präsenz und wird zitier- wie auch kritisierbar. Sein gutmütiges Wesen, vielseitige Gelehrtheit und seine Eigenschaft als guter Gesprächspartner, welche immer wieder ausdrücklich betont werden[34], sorgen für wohlwollende Empfehlungsschreiben, diese wiederum - auf den nächsten Stationen seiner Reise - für eine Aufnahme mit positiver Erwartungshaltung. Ferner gehörte seine Teilnahme an wissenschaftlichen Preisausschreiben genauso zum guten Ton wie die Tatsache, dass er alleine forscht. Um das Bild abzurunden seien hier seine Mitgliedschaften in vielen wissenschaftlichen Gesellschaften erwähnt.

Zu Methode und Inhalt gibt es eine Vielzahl von Anmerkungen, sowohl in seinen Biographien[35], als auch im zeitgenössischen Briefverkehr - dort wo Chladni erwähnt wird, findet sich fast immer auch Kommentar zu seiner Methodik, der diese positiv hervorhebt. Um die nicht alle im Einzelnen aufzuzählen, gebe ich eine kurze Aufzählung der für lobenswert befundenen Eigenschaften.

Chladni beschäftigt sich mit einem Forschungsgegenstand ausführlich, gründlich und systematisch, behält dabei aber seine Unparteilichkeit und Offenheit für Anregungen bei. Er führt in seinen Werken immer einen Vergleich seiner Entdeckungen

[34] Weber bemerkt dazu u. a.: „[Er] nimmt […] in Gesellschaften, die Erheiterung und Belehrung zum Zweck haben, einen vorzüglichen Platz ein […]“ ([3], S. 193)

[35] als Quelle habe ich nur diejenigen Biographien herangezogen, die bald nach seinem Tod verfasst wurden, da andernfalls die Gefahr besteht, dass spezifische Aspekte des Wissenschaftsverständnisses des Autors durchscheinen, die zu Chladnis Zeit noch nicht fest etabliert waren.

mit der Erfahrung durch und gibt Beispiele, wie sie nutzbar gemacht werden können. Zu Ergebnissen gelangt er durch „Nachdenken und Beobachten“ - eine Besinnung auf antike Tugenden, denen sicherlich das zielgerichtete Experimentieren als Lieferant des Beobachtbaren voranzustellen ist. Er versucht, diese Ergebnisse „zu gemeinnützigem Wissen“ zu machen (eine Anmerkung, die auf seine Vorführungen abzielt) und bemüht sich um eine gemeinverständliche Darstellung. Durch regen Kontakt mit anderen Wissenschaftlern und das Studium der aktuellsten Veröffentlichungen auf seinem Gebiet versucht Chladni stets auf dem neuesten Stand zu bleiben.

Diese Interpretationen ließe sich auch aus Äußerungen Dritter kondensieren. Er selbst macht aber auch an vielen Stellen Aussagen, die sich bezüglich seines Wissenschaftsverständnisses interpretieren lassen. Diese nehmen eine besondere Stellung ein, da ein guter Teil der Meinungsbildung über Chladni sicherlich anhand dieser Aussagen stattfinden musste und sich nicht mit Sicherheit sagen lässt, inwieweit sie mit Bedacht gewählt wurden, um einen positiven Effekt zu erzeugen. Diese Unterstellung mag zwar auf den ersten Blick boshaft klingen, doch sie impliziert nicht, dass man sich Chladni als Heuchler vorzustellen habe. Sie soll nur ein Hinweis darauf sein, dass sich heute nicht mit Sicherheit trennen lässt, welcher Teil der Aussagen Chladnis innerer Überzeugung entsprach und welcher der Notwendigkeit der Anerkennung als Wissenschaftler geschuldet ist.

Fast alle dieser Aussagen beziehen sich auf die unbedingte Notwendigkeit des Vergleichs der Theorie mit der Praxis (und wiederum der Praxis mit vorausgegangenen Erfahrungen), des genauen und unvoreingenommenen Beobachtens und der Notwendigkeit einer mathematischen Darstellung, die er mit dem zugehörigen Naturgesetz gleichstellt. Er spielt auch auf die Validierung durch Wiederholbarkeit an, indem er klarstellt, er habe „nichts niedergeschrieben, was ich nicht durch mehr als einmal angestellte Erfahrungen bestätigt gefunden habe“[36]. Erwartungsgemäß deckt sich vieles davon mit dem, was seine Kollegen an der Methodik Chladnis würdigten. Bei Hochadel findet sich eine Bemerkung, die einen geringfügig anderen Aspekt von Chladnis Arbeitsstil recht gut beschreibt: „Der Naturforscher [erscheint] völlig entrückt, ernsthaft und still widmet er sich seiner Arbeit […]“.[37]

[36] [9], *Neue Beyträge*, S. 4

[37] [46], S. 300, dazu ein Zitat Chladnis: „[…] weil ich so sehr in Naturforschungen vertieft war, dass ich an fast gar nichts anders denken konnte“ ([5], S. 449)

Untersuchen wir jetzt, auf welche Weise seine Vorführungen die Waagschalen füllen können. Sie unterscheiden sich in einigen wichtigen Punkten von denen der Elektrisierer. Das beginnt schon beim Publikum, denn dadurch, dass er die Ankündigungen größtenteils in den „gelehrten" Zeitschriften des Ortes platziert und sie darin, wie schon erwähnt, einen Konzertcharakter versprechen lässt, findet schon eine Vorselektierung statt. Diesen Punkt muss man etwas relativieren, da der Inhalt seiner Vorführungen im Vergleich zu den Großveranstaltungen der Elektrisierer recht unspektakulär daherkommt. Die Wahl des Publikums geschah also schon unter der Prämisse, dass sich die „breite Masse" ohnehin nicht für seine Vorführungen hätte begeistern können, das avisierte Publikum im Gegensatz dazu sehr wohl - vielleicht auch um ihren gesellschaftlichen Stand im Charakter der Veranstaltung reflektiert zu sehen. Dazu kommt, dass er sich schon vor der Ankunft in den Kreisen um seine Gastgeber bekanntmachen lässt[38], so dass Chladni recht gute Kontrolle über die Zusammensetzung seines Publikums gehabt haben dürfte.

Abb. 4: Chladni vor Publikum

Schließlich wandelte sich der Charakter seiner Vorführungen über die Zeit - und mit der Aufnahme des Meteoritenthemas enorm - so dass Loewenfeld schreibt:

> Alles, Mitteilungen und Resultate, zeugen von der großen Achtung, die man dem Gelehrten entgegenbringt. Von Virtuosentum und Konzert keine Spur mehr. Nur noch die Wissenschaft." ([1], S. 126)

Wenn der Musiker Carl Friedrich Zelter an Goethe schreibt, dass von Chladnis Zuhörerschaft ein Großteil „sanft eingeschlafen ist"[39], dann ist das sicherlich übertrieben und spricht nicht unbedingt für Chladnis Vortragsstil, zeigt aber auch, dass es bei ihm nicht „blitzt, kracht und knallt", zumal die meisten anderen Berichte von einem aktiven, engagierten Publikum sprechen und Weber Chladnis Vorträge als recht lebhaft in Erinnerung hat.[40] Es haftet ihnen auch ein gewisser Hauch von

---

[38] Dieses Verhalten u. a. gehörte zum guten Ton als Mitglied der *res publica literaria* - gleichsam dem Vorgänger der scientific community. Mehr dazu in dem Werk: *Res publica litteraria : die Institutionen der Gelehrsamkeit in der frühen Neuzeit* von Sebastian Neumeister (Hrsg.).

[39] [1], S.126

[40] Es lag wohl eher an genau dieser Redseligkeit, dass das Publikum die Augen nicht mehr hat offen

Schöngeistigkeit an, wenn man sich Chladni, mal am Instrument, mal an einer Tafel und oft mit seinen Platten in der Hand, vorstellt, wie er nicht nur von Physik, sondern auch von seinen Reisen und Bekanntschaften geredet haben mag.[41]

Mit der Wandlung geht auch einher, dass die Konzerte von nun an als „Vorlesungen" gelten und auch so angekündigt werden. Olbers schreibt im gleichen Brief (s. Ref. 39) von einer Vorlesungsreihe mit 12 oder 14 Terminen - hier erinnert nichts an die höchstens zweistündigen Darbietungen auf dem Marktplatz, wie es bei den Elektrisierern die Regel war. Chladni hat es geschafft, aus seiner Person den Schausteller- und Virtuosenanteil fast völlig zu verbannen (dies und der immer ähnliche Inhalt führten allerdings zu sinkenden Besucherzahlen).

Es folgt die Analyse der letzten Ebene: Welche Persönlichkeitsmerkmale - dazu zählen an dieser Stelle auch die Moralität seiner Handlungen und seine Einstellung gegenüber den Zielen und Zwecken der Forschung - meinen Dritte im Zusammenhang mit Wissenschaftlichkeit bei Chladni anzutreffen und welche gibt Chladni selber preis?

Der wichtigste Punkt, mit der er ganz sicher auf offenen Ohren stieß, ist wohl seine strikte und immer wieder betonte Ablehnung von Scharlatanerie. Damit meint er die bewusste Darstellung von falschen Tatsachen, aber auch unsauberes Vorgehen oder die Beeinflussung durch „niedere" Beweggründe - entweder um sich zu profilieren oder anderweitig Nutzen daraus zu ziehen. Ebenso verurteilt er anmaßendes Auftreten, ob in privater Gesellschaft oder bei Vorführungen. Kein Wunder also, dass Goethe ihn als „Zierde der Nation"[42] bezeichnet. Weiterhin lobt man Chladnis Ansicht, die Physik habe immer auch für einen (praktischen) Nutzen zu forschen - den er durch seine Instrumente auch sofort liefern kann. Es läuft also auf die Entwicklung von Naturverständnis und somit -beherrschung hinaus, nicht auf eine bloße Zur-Schau-Stellung von Phänomenen.

Das Aufzeigen von verborgenen Symmetrien und einer natürlichen Ästhetik, wie die Klangfiguren damals oft interpretiert wurden, ist dazu kein Gegensatz, sondern expliziert m. E. den Geist der Zeit, die Überlegenheit des Menschen darin zu suchen, dass er durch geschickte Experimente der Natur ihre Schönheit und Einfachheit zu entlocken und nutzbar zu machen versteht. Diese Begabung ist nur dem „wahren"

---

halten können. Dazu meint Olbers: „Seine Bekanntschaft mit fast allen Gelehrten […] gibt seinem Redefluss doch zuweilen [sic!] etwas Unterhaltendes" ([8], S. 373)

[41] Diese Vorstellung bleibt allerdings reine Spekulation und kann die These nur indirekt stützen.

[42] [1], S. 122

Forscher eigen.
Etwas weiter gefasst und moderner formuliert sind Zuschreibungen wie Durchhaltevermögen und Frustrationstoleranz, Beobachtungsgabe und Fleiß. Natürlich auch Aufopferungsbereitschaft, „Liebe und Neigung“[43] zum gewählten Forschungsgegenstand und ein angeborenes Talent, das zu jener Zeit als wichtige Voraussetzung galt.
Obwohl sicherlich noch unvollständig, lässt sich das Aufzählen an dieser Stelle abbrechen. Das Bild, das ich durch die obige Analyse gezeichnet habe, rechtfertigt eindeutig die Hochachtung, die Chladni entgegengebracht wurde. Man kommt an dieser Stelle zu einem erstaunlichen Ergebnis in Bezug auf die anfängliche These. Die lautete, dass grade diese Achtung einer Legitimation bedarf, da davon auszugehen war, dass die Gemeinsamkeiten seines Vorgehens mit dem eines Elektrisierers seine Anerkennung als Wissenschaftler hätten verhindern müssen. Nachdem wir die jeweiligen Gründe auf verschiedenen Ebenen analysiert haben, bleibt jedoch nur der Schluss übrig, dass an der Anerkennung zu keiner Zeit ein ernstzunehmender Zweifel bestand. Die Zuschreibungen liefern auf jeder Ebene das klare Bild eines Wissenschaftlers nach den landläufigen Kriterien.
Im Gegenzug werden alle eigentlich hinderlichen Merkmale auf äußere Umstände zurückgeführt, oder an eigentümlichen Charakterzügen Chladnis begründet, die er selbst durch Offenlegung seiner Kindheitserfahrungen oder anderer persönlicher Beweggründe an vielen Stellen seiner Werke transparent machen will (und die von seinen Biographen dankbar aufgegriffen werden[44]).
Damit wird Chladni in den Augen anderer zu einem „Original“[45], das zuweilen ob seiner Lebensweise bemitleidet wird[46]. Es findet sich aber nirgendwo ein Hinweis darauf, dass er aufgrund der o. g. Gemeinsamkeiten angefeindet worden wäre.
Unter diesen Gesichtspunkten ließe sich die These von Chladni als „letztem Elektrisierer“ also nicht halten: Formal gab es Ähnlichkeiten, doch diese war Chladni stets bestrebt zu verringern oder anderweitig zu erklären, so dass sich schließlich das oben gezeichnete Bild ergeben konnte.

[43] [5], S. 438

[44] Weber beispielsweise führt Chladnis Reisedrang auf dessen Selbstbild als Weltbürger zurück.

[45] vgl. [3], S. 192

[46] vgl. [8], S. 372

Der Blick zurück - Konzepte der Akustik vor Chladni

Das folgende Kapitel soll auf keinen Fall den Anspruch erheben, die gesamte Geschichte der Akustik in allen Details nachzuzeichnen. Die drei Autoren, die diese Arbeit unter sich aufgeteilt haben, sind Hunt, Truesdell und Beyer - ihre Werke haben von allen Seiten große Anerkennung erfahren. Ich möchte hier stattdessen die Stationen der Geschichte der Akustik beleuchten, an denen grundlegende Begriffe und Konzepte geprägt wurden[47], welche Chladnis Forschungen an Klangfiguren erst möglich gemacht haben. Erste Spekulationen zu den Ursachen der Schallentstehung und -fortpflanzung oder das Konzept der Resonanz sind solche Stationen.
Aber auch grundlegende Ideen zur „Natur“ des Schalls und das Entstehen einer Musiktheorie waren notwendige Schritte auf dem Weg der Ausdifferenzierung von dem, was später einmal ein verzweigtes Teilgebiet der Physik werden sollte.
Gerade wenn man im Begriff ist, Ereignisse in die Entstehungsgeschichte der Akustik aufzunehmen oder sie auszugrenzen, sollte man Vorsicht walten lassen. Oft sind Ideen und vermeintliche Offenbarungen, die sich später als Irrwege herausstellten nur unter unserem zeitgenössischen Blick bedeutungslos, da wir mit einer kanonisierten Akustik als einer etablierten Wissenschaft aufgewachsen sind. In der Geschichte der Wissenschaften sind aber mitunter die Irrwege die fruchtbarsten Böden für spätere Erkenntnis. Sei es, dass sie als leuchtende Gegenbeispiele stehen, oder dass ihnen viel später ein wahrer Kern oder revolutionärer Ansatz nachgewiesen werden kann. So muss man bei der Bewertung eines Ereignisses immer den Gesamtzusammenhang im Auge behalten. Das heißt, sowohl historisierend, also den geschichtlichen Kontext berücksichtigend, als auch reflektierend, d.h. aus der Rückschau unter den gegebenen Umständen heraus, zu urteilen. Dabei kommt es vor, dass Einzelereignissen sowohl in der einen wie auch in der anderen Betrachtungsweise eine besondere Bedeutung zuerkannt werden kann - diese Fälle sollen hier dargestellt werden.

[47] Da die Lesbarkeit des Textes leidet, wenn diese Konzepte immer wieder separat expliziert werden, greife ich darauf zurück, die entsprechenden Passagen kursiv zu setzen (davon ausgenommen sind Eigennamen).

Steinzeit, Altertum und Antike

Schon diese erste Überschrift könnte als strittig angesehen werden - Akustik in der Steinzeit? Tatsächlich hat man einen Nachweis dafür, dass unsere Vorfahren schon vor vielen tausend Jahren etwas für Musik übrig hatten, wie der Fund einer auf ca. 33 000 v. Chr. datierten Knochenflöte belegt[48]. Wer jetzt argumentiert, dass das erste Auftreten von Musikinstrumenten noch nichts mit Akustik zu tun hat, sollte sich die Einleitung des Kapitels ins Gedächtnis rufen. Statt zum Musizieren auf naturbelassene Objekte wie Steine, Baumstämme oder Früchte zurückzugreifen wurde hier offensichtlich zielstrebig und auf Basis eines bekannten Phänomens *ein Instrument mit bestimmten Eigenschaften konstruiert*[49]. Die Flöte hat 3 - in späteren Ausführungen auch 4 - Löcher, deren Lage aus heutiger Sicht beurteilt mit Bedacht gewählt worden sein muss.

Weitere Funde sind Vorgänger der Panflöten oder eine Sammlung von Holzstäben, die ohne weiteres ein Urahn des Xylophons sein könnte.

Man kann sich kaum vorstellen, dass in dem langen Zeitraum der Benutzung und Verfertigung der ersten Musikinstrumente sich niemand unter unseren Vorfahren befand, der sich Gedanken über die Entstehung dieser Töne gemacht hat und seine Ideen kund getan und zum Bau besserer Varianten von Instrumenten benutzt hat.

Ein notwendiges, noch sehr undifferenziertes Konzept dieser frühen „Akustik“ in Anbetracht der Instrumente, die sie hervorbrachte, könnte der fundamentale *Zusammenhang zwischen Dimension & Materialeigenschaften des Instrumentes und dem erzeugten Klang* sein. Alle weiterführenden Aussagen bleiben hochspekulativ ob der geringen Anzahl von archäologischen Funden, die sich diesbezüglich deuten ließen.

Der nun erfolgende große Sprung in die griechische Antike lässt sich nur damit rechtfertigen, dass diese Epoche als grundlegend für das Verständnis und die Entwicklung nicht nur der Wissenschaften, sondern auch der Kultur und Politik des Abendlandes und der späteren westlichen Zivilisationen angesehen wird. Diese Sichtweise erfreut sich ebenso breiter Zustimmung wie sie subjektiv ist. Mit einer objektiv besseren Datenlage zu dieser Epoche ist sie jedenfalls nicht zu rechtfertigen.

---

[48] s. z.B. [C] u. [D]

[49] dessen Klang heutigen Ohren nicht einmal besonders ungewöhnlich vorkommt, wie dieses kurze Stück auf einem Nachbau der Flöte demonstriert: *http://www.oeaw.ac.at/praehist/anfang/floete/floetb.mp3*

Sie resultiert aus einer verklärenden Überhöhung der griechischen Kultur gegenüber anderen Kulturkreisen, denen oft wenig Beachtung geschenkt wird, da ihr Wirken (z.B. das phönizische Alphabet oder orientalische Kunstformen) Dank der Vielseitigkeit der Ursprünge griechischer Lebensart meist sekundär durch diese erfolgte. Hunt unterstützt diese These und zeigt durch häufige Exkurse in die orientalische Wissenschaft deren Gleichwertigkeit - man sieht, nicht jede Kultur hat den Zeitpunkt ihres größten Erkenntnisfortschritts synchron zu anderen.
Die Wertschätzung der Antike tradiert sich zu Chladnis Zeiten dadurch, dass griechisch zum Bildungskanon aller Gymnasien gehörte. Wenn Chladni in seiner Akustik vom „arithmetischen Teil der Akustik“ spricht, so bezieht er sich damit direkt auf zwei berühmte Vertreter der Antike - zum einen Pythagoras von Samos (ca. 570-500 v. Chr.), Mathematiker, Philosoph und Begründer der religiös geprägten Schule der Pythagoreer und zum anderen Euklid von Alexandria (ca. 365-300 v. Chr.). Dieser baute auf der pythagoreischen Arithmetik auf und entwickelte die Grundlagen der Geometrie, wie sie noch heute gelehrt werden. Er beschäftigte sich zudem mit der Irrationalität von Zahlen und wurde dafür oft von späten Schülern des Pythagoras angefeindet, die dadurch die Vollkommenheit ihrer auf einfachen Zahlenverhältnissen beruhenden mystischen Weltsicht gefährdet sahen. Beide verbindet jedoch genau diese Liebe zu den Zahlen, die sie dann schließlich zur Musik und der Mathematik der Töne führte.
Bei Pythagoras zählte das Prinzip „*Alles ist Zahl*“ und so liest man immer wieder von der vermutlich von seinen Schülern in die Welt gesetzten „Legende der klingenden Hämmer“. Angeblich soll Pythagoras auf einem seiner Denkspaziergänge an einer Schmiede vorbeigekommen sein, wo das Schmiedegut gerade mit einer Anzahl von verschieden schweren Hämmern bearbeitet wurde. Er soll dabei bemerkt haben, dass manche Hämmer gleichzeitig benutzt sehr gut zusammenklingen, andere wiederum ganz und gar nicht. Es muss augenscheinlich an der Größe, also dem Gewicht der Hämmer gelegen haben und so fand er auch durch Wiegen heraus, dass sich Wohlklang nur bei ganz bestimmten Gewichtsverhältnissen einstellt und entwickelte seine *Theorie von Konsonanz und Dissonanz*, die noch heute Bestand hat.
Aus diesen Beobachtungen heraus führte Pythagoras Versuche an gespannten Saiten durch und entwickelte sein Tonsystem. Er erhob den Harmoniegedanken einfacher Zahlenverhältnisse zum religiösen Universalprinzip und gilt damit als Begründer der (immer mal wiederbelebten) Vorstellung einer „Harmonie der Sphären“ - alle Vorgänge der Natur (z.B. der Lauf der Gestirne) sollen sich einfachen Zahlenverhält-

nissen unterwerfen und somit ihre eigene Harmonie enthalten[50].

Auf der eher technischen Seite machte man sich Gedanken um die Tonentstehung und seine Ausbreitung in der Luft. Letztere war unbestrittener *Träger der Töne*, auch wenn man sich noch uneinig war, auf welche Weise und was genau transportiert wurde (atomare und kontinuierliche Vorstellungen der Luft konkurrierten dabei miteinander). Als Ursache der Töne hat man Körper, genauer seine *Schwingung*, ausgemacht und man vermochte auch schon ursächlich zwischen *Lautstärke und Tonhöhe* zu unterscheiden. Letztere brachte man allerdings in Zusammenhang mit der Schnelligkeit des Tons in der Luft, wo dieser sich gradlinig, einem Wind gleich, zum Hörer bewegt. Für diese Zeit üblich, verstrickte man sich daraufhin in metaphysische Auseinandersetzungen über die Natur der Töne, der Luft und der Wahrnehmung an sich, so dass noch einige Zeit verging, bis die viel versprechenden Ansätze weitergeführt werden konnten.

Dies geschah durch Euklid und sein Werk „De Sectio Canonis“. Darin beschreibt er Versuche ähnlich denen Pythagoras' am Kanon, heute bekannt als Monochord. Dabei handelt es sich im einfachsten Fall um ein Brett, auf dem eine Saite befestigt ist (oft werden auch Versionen mit mehreren Saiten als Monochord bezeichnet). Euklid fand nun (wie Pythagoras vor ihm) heraus, dass sich die Tonhöhe proportional zur Spannung der Saite und umgekehrt proportional zur Saitenlänge verhält. Er entwickelte zudem den Vorgänger unseres heutigen Tonsystems, indem er die Tonintervalle mathematischen Brüchen zuordnete und an ihnen die Möglichkeiten der Harmoniebildung ausführlich untersuchte. Wichtiger noch ist die Erkenntnis, dass sich nicht nur die Tonhöhen wie die Längen der Saiten verhalten, sondern auch die Schwingungszahlen. Er war damit der erste, der die Tonverhältnisse auf absolute Zahlenwerte zurückzuführen versuchte. Er baute damit auf der von den Stoikern geäußerte Analogie zwischen der Schallausbreitung und der Ausbreitung von Wasserwellen auf und verknüpfte sie mit der Feststellung Demokrits, dass *ein Ton entsteht, „wenn die bewegten und nach gleicher Gestalt gruppierten Atome an das Ohr schlügen“*[51].

Auch wenn sich mit Platon und Aristoteles weiterhin große Namen darum bemühten, mehr Licht in die Sache zu bringen, wuchs die Erkenntnis in den Folgejahrhunderten kaum über den bisherigen Status hinaus an. Für diese vermeintliche Stagnati-

[50] vgl. Theophrastos von Eresos in [29], der behauptet, es „müsse doch alles, was […] in gewissen Zahlenverhältnissen zueinander steht, Melodieen bilden […]“ oder Keplers Anstrengungen in dieser Hinsicht, die er in seine *Weltharmonik* darlegt

[51] s. [29], S14

on gibt es mehrere Gründe. Zum einen war es unter den (natur)philosophischen Schulen in Griechenland anerkannte Tradition, alle Lehren der Vorgänger oder kritischer Zeitgenossen für Unsinn zu erklären oder wortgewaltig umzudeuten. Aus erkenntnistheoretischer Sicht fehlte damit eine gesicherte, allgemein anerkannte Wissensbasis, auf der sich neue Erkenntnis hätte entwickeln und an der sie hätte gemessen werden können. Damit ist man schon beim zweiten Kritikpunkt angelangt: Die fehlende experimentelle Absicherung von Hypothesen. Es war unüblich (und verpönt) sich „die Hände schmutzig zu machen", wenn man zu einem logisch schlüssigen Wissensgebäude gelangen wollte. Die größte Anerkennung konnte man erwerben, indem man sich auf die Grundtugenden des stillen Nachdenkens und des logischen Argumentierens und Folgerns beschränkte. Zumal war viel des Inhalts naturphilosophischer Schriften aus heutiger Sicht sehr metaphysisch, ja eigentlich religiös geprägt - Argumente und Schlüsse traten zwar logisch korrekt auf, blieben aber in ihrer Allgemeingültigkeit meist unwiderlegbar, da sie sich auf „jenseitige" oder „mystische" Zusammenhänge stützten.[52]

Die folgenden Jahrhunderte bis zum Beginn des frühen Mittelalters scheinen relativ bedeutungslos an der Akustik vorübergegangen zu sein. Tatsache ist, dass kaum Aufzeichnungen über neue akustische Erkenntnisse aus dieser Zeit existieren. Man beschränkte sich hauptsächlich auf metaphysische und mathematische Themen und das Zusammentragen und Interpretieren älterer Autoren – dieses Vorgehen kennzeichnete auch den bald folgenden Übergang zur Scholastik.

Trotzdem kann man das Erreichte als gute Basis bezeichnen: Es existiert mittlerweile ein grundlegendes Verständnis der Schallentstehung und Ausbreitung. Man ist sich einig darüber, dass er sich nur endlich schnell ausbreitet und das Ohr eine wichtige Rolle bei seiner Wahrnehmung spielt[53]. Die mechanischen Seiten der Schallentstehung waren einigermaßen verstanden, blieben aber bis auf die erwähnten Untersuchungen an Saiten mathematisch unberührt, obwohl sich entsprechende Instrumente wie Glocken, Schalen, Stäbe etc. großer Beliebtheit erfreuten. Das Phänomen der *Re-*

[52] Aristoteles versuchte, die Problematik der „Universalien" Platons zu umgehen und so dem Mystizismus weitgehend zu entsagen. Seine Behauptung, leichte Körper fallen langsamer als schwere wird heute als Paradebeispiel dafür gesehen, dass sich weittragende Fehlkonzepte durch gezielte Experimente hätten verhindern lassen.

[53] Während man sich über das *Ohr als Organ der Schallaufnahme* einig war, existierte ein breites Spektrum an Theorien, wo genau im Körper das Hören stattfindet. Dafür, wie auch für die anderen Sinneswahrnehmungen, ist bei den Griechen die Seele zuständig, über deren Sitz ein beständiger Streit herrschte. Die Pythagoreer beispielsweise vermuteten sie (u. a.) in der Nähe der Leber.

sonanz wird zwar nicht näher erwähnt, findet aber beim Bau griechischer Amphitheater sinnvolle Anwendung: Unter den Sitzreihen wurden tönerne Gefäße platziert, die – nach dem Prinzip eines Helmholtz-Resonators – das niederfrequente Murmeln der Zuhörer dämpften.

Vom frühen Mittelalter bis Newton

Das frühe - oder auch „dunkle“ - Mittelalter brachte in der westlichen Welt tatsächlich wenig Erleuchtung. Möchte man die griechische Tradition fortgeführt erleben, muss man sich gen Osten wenden, wo um 700 n. Chr. das byzantinische und das arabische Reich sowie der Hinduismus zu erblühen begannen. Die große Bewunderung, welche die arabischen Kalifen den griechischen Philosophen und Gelehrten entgegenbrachten, führte dazu, dass immerhin ein kleiner Teil der klassischen Schriften durch Übersetzung und Konservierung bis heute erhalten blieb[54].

Die Völker des nahen und fernen Ostens hatten nun mehr als 500 Jahre Zeit, das wissenschaftliche Erbe zu studieren und eigene Beiträge zu liefern, bis der Westen aus seiner intellektuellen Starre erwachte und ab dem 13. Jahrhundert erst mit kleinen, dann immer größer werdenden Schritten seinen Rückstand aufzuholen versuchte.

Die arabische Wissenschaft befasste sich, fast noch stärker als es bei den Griechen der Fall war, mit der *Musik als Grundlage für akustische Erkenntnisse*. Wie dieses Vorgehen es schaffte innerhalb der westlichen Scholastik fortzubestehen, deren erklärtes Ziel es war, eine rationale Lehre der Wissenschaften auf einem theologischen Fundament zu schaffen, dafür gibt Hunt zwei Gründe[55]. Zum einen ist die Musik hoch angesehen als eine der sieben freien Künste und war schon enthalten im klassischen Quadrivium der Pythagoreer und zum anderen ist sie eine experimentelle Wissenschaft per se. Zumal sie, durch das Bedürfnis nach Logik und Objektivität und den griechischen Lehrmeistern, allen voran Aristoteles, nacheifernd, auf mathematisch sichere Beine gestellt und mit einem theoretischen Unterbau versehen werden wollte.

Trotz dieser guten Voraussetzungen wollte es auch im Islam einfach nicht voran gehen. Dafür wurden viele Fehler und Ungereimtheiten, welche in der klassischen Lehre noch auftauchten, erkannt und ausgemerzt.

Die wichtigsten Beiträge dazu leistete der Philosoph, Arzt und Wissenschaftler *Avi-*

[54] Die Bewunderung ging manchmal so weit, dass bewaffnete Truppen, ausgeschickt von wissbegierigen Kalifen, griechische Bibliotheken unter Androhung von Gewalt zur Herausgabe oder Kopie ihrer Werke zwangen.

[55] vgl. [19], S.46

cenna (persisch: Ibn Sina) um 1000 n. Chr. mit seinen Werken, unter denen sich neben Büchern über Metaphysik, Logik, Medizin und Alchemie auch eines über die Physik findet. Im Abschnitt über Töne und Musik schreibt er unter anderem über die Harmonik des mehrstimmigen Gesangs und berichtet als erster von einem Experiment zu Bestimmung der Unterscheidungsschwelle des Ohres, bei dem er für zwei Töne mit dem Verhältnis (n+1)/n dasjenige n bestimmte, für welches sich kein Unterschied mehr ausmachen ließ. Sein Wert für n von 45, entsprechend einem Unterschied von ca. 2,2%, deckt sich relativ gut mit den heutigen Messungen unter Normalbedingungen[56].

Man liegt richtig, wenn man den Eindruck hat, dass sich viel zu wenig mit den mechanischen Anfangsgründen des Schalls und der Töne beschäftigt wird. Dieser Umstand verdankt sich höchstwahrscheinlich der Tatsache, dass in der Musik der Schwerpunkt auf die menschliche Stimme bzw. den Gesang[57] sowie auf die theoretische Untersuchung von Tonsystemen gelegt wurde. Einer der ersten, die im 12. Jahrhundert dieses Gebiet verließen, war ein deutscher Mönch namens *Rogerus von Helmarshausen*[58]. Sein monumentales Werk über die zeitgenössischen Kunsthandwerkstechniken beinhaltet eine Art Werkstoffkunde verschiedener Metalle sowie Glas. Von Helmarshausen versuchte dabei, die Konstruktion und Stimmung von Orgelpfeifen und Glocken nachvollziehbar darzulegen.

Wenn zu Chladnis Zeiten die Akustik als Dreigespann von Musik, Mathematik und Mechanik gesehen wird, dann legten sicherlich die „alten“ Griechen den Grundstein für diese Sichtweise. Doch außer im Fall der Musik wurde bis zu diesem Punkt nicht mehr nennenswert an den einzelnen Baustellen weitergearbeitet. Das sollte sich nun ändern, denn um das Jahr 1200 verfasste *Leonardo da Pisa*, heute bekannter als Leonardo Fibonacci, sein Werk „Liber Abaci“, was man mit „Buch der Rechenkunst“ übersetzen kann. Er deckte damit einen weiten Bereich der „niederen“ Mathematik ab. Angefangen bei den Grundrechenarten über arithmetische Reihen, Zins- und Prozentrechnung sowie Dreisatz bis hin zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und zur Bestimmung von Wurzeln. Auch wenn noch andere bedeutende Mathematiker zu dieser Zeit die Werke Euklids wiederentdeckten und ähnliche Ziele verfolgten wie Fibonacci, hat dieser als einziger in seinem Werk konsequent das da-

[56] Unter Laborbedingungen liegen die Werte nur noch im Promillebereich.

[57] Die gregorianischen Gesänge z.B. kamen um 590 n. Chr. auf und waren ein beliebtes Thema der Untersuchung und Weiterentwicklung.

[58] Seine Schriften verfasste er unter dem Pseudonym *Theophilus Presbyter.*

mals noch fast unbekannte arabische Zahlensystem benutzt und seine Vorzüge gegenüber dem römischen dargestellt. Sein Zeitgenosse *Jordanus Nemorarius* befasste sich darüber hinaus mit mechanischen Problemen wie der schiefen Ebene und hat nach Hunt schon Konzepte wie Drehmoment und virtuelle Arbeit behandelt[59]. Die Aussichten für die Akustik scheinen sich zu bessern, jetzt, da auch die langsameren Züge des Gespanns wieder aufholen können.

Was noch fehlte, war jemand, der es wagte, aus der scholastischen Tradition auszubrechen und das „Schaffen" zurück in die Wissenschaft zu bringen. Tatsächlich kann man dazu gleich zwei Namen nennen - *Robert Grosseteste*, Philosoph und Theologe, und *Roger Bacon*, Franziskanermönch und ebenfalls Philosoph. Beide wirkten - im Abstand von etwa 50 Jahren - in Oxford, und beide legten großen Wert auf die experimentelle Methode. Grossetestes Haupt-Interessengebiet war zwar die Optik, doch auch eine Abhandlung über die Schallerzeugung ist erhalten. Darin findet sich eine Analyse der Vorgänge innerhalb eines Stabes, der durch Anschlagen zum Schwingen gebracht wird. Diese zielt auf Dichtewellen im Material ab und gebraucht die Begriffe *„longitudinal" und „transversal"* im passenden Kontext. Hunt erkennt in dieser Passage[60] sogar eine Vorahnung der Poissonzahl, was etwas weit hergeholt erscheint, da bei Grosseteste weder von einem bestimmten Verhältnis der Kontraktionen in die verschiedenen Richtungen die Rede ist, noch von irgendeiner anderen Art der Proportionalität - er beschreibt den Vorgang rein phänomenologisch ohne weitere Schlüsse zu ziehen. Vielleicht hätte er sich dessen rühmen können, hätte er sich der von Bacon dargebotenen Methodik bedient.

Auch wenn Bacons gewichtige Rolle in der Wissenschaftsgeschichte durch neuere Forschungen etwas relativiert wird, bleiben seine Forderungen für die damalige Zeit sehr bedeutsam. Wissen, so stellt er fest, erlange man nur durch Empirie, Experimente und mathematische Überlegungen[61]. Er führt zusätzlich vier *offendicula* (Hindernisse) an, die dabei unbedingt zu vermeiden sind. Ohne sie im Einzelnen aufzuzählen, ist beachtlich, dass er den Autoritätsglauben dazu zählt - ein Hauptmerkmal der scholastischen Denkart.

Zugegebenen - die Akustik hat davon nicht direkt profitieren können. Hier ist man für wirklich Neues noch immer auf den nahen Osten angewiesen, genauer auf den Scheich *Safi al-Din*, der in seinem Werk „Kitāb al-Adwar" (etwa „Buch der musikali-

[59] vgl. [19], S.64

[60] s. [19], S. 65f

[61] vgl. [K]

schen Methoden“, um 1252) mit der Vorstellung aufräumt, die Kraft, mit der ein Ton erzeugt wird, stehe in direktem Zusammenhang mit der Tonhöhe. Stattdessen *beeinflusst sie die Intensität des Tons*. Außerdem gibt er eine recht modern anmutende Definition dafür, *was einen musikalischen Ton ausmacht in Abgrenzung zu anderen Geräuschen*. Er schreibt sinngemäß, ein musikalischer Ton sei ein „Geräusch, für welches man den Überschuss an Schwere [Intensität, d. A.] oder Schärfe [Tonhöhe, d. A.] bezüglich eines anderen Tons messen kann“[62].

Jenes vorher wirksame Fehlkonzept hat sich damit beinahe 1600 Jahre lang gehalten - seit seiner ersten Erwähnung durch den Vorsokratiker Archytas von Tarent (428 v. Chr. - 347 v. Chr.). Damit zeigt sich aufs Neue, dass zielgerichtetes Experimentieren die Methode der Wahl hätte sein sollen.

Die Forderungen Bacons sollten auch noch ein weiteres Jahrhundert ungehört bleiben, bis in der Renaissance *Leonardo da Vinci* (1452-1519) auf die Bildfläche trat[63]. Neben seinen bedeutenden Leistungen in Kunst und Architektur sind von ihm auch Notizen bekannt, in denen er sich mit mechanischen Fragen auseinandersetzt. Seine Aussagen über den Schall sind direkte Folgerungen aus seinen Beobachtungen von Wasserwellen, denen er dasselbe zugrunde liegende Prinzip unterstellt. Dabei stieß er auch auf *das Phänomen der ungestörten Durchdringung, was wir heute als Superpositionsprinzip kennen*. Da Vinci geht sogar soweit, zu behaupten, dass es nur „ein Gesetz der Mechanik in allen Manifestationen von Kraft“ gibt[64] - als hätte er geahnt, dass es nicht mehr lange dauern sollte, bis die Axiomatisierung der Mechanik durch Newton geschehen konnte. Im Rahmen der Akustik kann man die Entdeckung der Superposition gar nicht genug hervorheben - beinahe alle kommenden Forscher setzen sie von nun an implizit voraus und noch kommende Ansätze zu einer mathematischen Theorie der elastischen Schwingungen wären ohne sie schnell im Sande verlaufen.

Der nächste „Bahnbrecher“ der Akustik ist wieder eine sehr bekannte Persönlichkeit. Gemeint ist der italienische Astronom, Mathematiker und Physiker *Galileo Galilei* (1564-1642). Seine Leistungen auf dem Gebiet der Kinematik sind bemerkenswert und werden nur noch von denen Newtons übertroffen. Zudem gilt er, was für unse-

---

[62] s. [19], S.70

[63] wie sehr auch er das Experiment schätze, zeigt folgendes Zitat: „Das Experiment irrt nie, sondern es irren nur eure Urteile, die sich von jener Wirkung versprechen, die in unseren Erfahrungen nicht begründet ist.“ Zur Mathematik sagt er: „Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften; denn durch sie kommt man zur mathematischen Frucht“. Mehr zu seinem Wissenschaftsverständnis findet sich z.B. in „Leonardo da Vinci. Der erste Wissenschaftler“ von Michael White.

[64] vgl. da Vinci in [19], S. 76

ren Fall viel bedeutender ist, als alleiniger Begründer der Elastizitätstheorie.
Anfänglich befasste er sich mit der Untersuchung von Pendelschwingungen, der Analyse dabei auftretender Kräfte und der Faktoren, von denen die Pendeldauer abhängt[65]. Sich auf seine Beobachtungen stützend legte Galilei als erster fest, was eine *vollständige Schwingung* ist. Er nannte es ganz passend „Wiederkehr", wenn das Pendel den Punkt, an dem es losgelassen oder angestoßen wurde, in der gleichen Richtung wieder durchläuft. Ganz analog behandelte er die Schwingungen von Saiten und mit diesem Konzept im Hinterkopf konnte er nun feststellen, dass das Verhältnis der Tonhöhen nichts anderes darstellt als das Verhältnis der zugehörigen Wiederkehren pro gleichen Zeitabschnitt (= Frequenzen) und zeigte dazu mit Experimenten, dass der Oktavschritt tatsächlich einer Verdoppelung der Frequenz gleichkommt. Dieser *Gedanke einer jedem Ton gleichzusetzenden, absoluten und messbaren Größe* ist in dieser Art völlig neu. Einige sahen das als Bestätigung ihrer platonischen Weltsicht an - als ein Beweis von sich in der Frequenz offenbarenden, idealen Eigenschaften eines jeden wahrnehmbaren Tons. Für andere dagegen hatte diese Einsicht etwas Entmystifizierendes - wenn ein Ton allein als die ihm zukommende Frequenz wahrgenommen wird, bleibt kein Platz für metaphysische Spekulationen[66].
Diese Jahre zwischen 1550 und 1650 liefern auch die ersten großen Fortschritte in der Mathematisierung der Akustik unter führender Hand von *Isaac Beeckman* (1588-1637) und *Marin Mersenne* (1588-1648). Mersenne griff Galileis Idee der Wiederkehr auf und prägte den heutigen Namen dafür: *Frequenz*. Bekannter ist die Tatsache, dass er sich als erster ausgiebig um die Bestimmung der *Geschwindigkeit des Schalls* bemühte. Erst durch direkte Messungen (Kanonendonner und Mündungsfeuer), dann durch das Messen der Zeit, bis ein Echo von einer Wand zurückgeworfen und wieder hörbar wird. Mit der letzten Methode erhielt er einen relativ genauen Wert von umgerechnet 316 ms^{-1}, wobei seine Vorgehensweise bemerkenswert ist. Um sehr kurze Zeitintervalle messen zu können, sprach er die Silben eines Satzes sehr schnell hintereinander in Richtung der Wand - bei welcher Silbe er nun das erste Echo wahrnahm, bestimmte die vergangene Zeit.
Der allgemeine Missstand einer ungenauen Zeitmessung war ihm zuwider und um ihn zu beseitigen wand er viel Energie darauf an, die Gesetze der Pendelbewegung

[65] Die Erfindung der Pendeluhr geht auf Galileis Forschungen zurück. (s. [N])

[66] Ein offensichtlicher Irrtum, wie die kurz zuvor von Kepler unternommenen und im 16. Jahrhundert wieder aufkeimenden Versuche belegen, aus den Planetenbewegungen eine „Weltharmonie" abzuleiten.

zu meistern und Pendeluhren zu konstruieren, die exakt im Sekundentakt schwingen. Beeckman konnte in der Zwischenzeit auf mathematischem Weg zeigen, *wie eine Teilung der Saite die Frequenz beeinflussen muss*[67]. Daran anknüpfend stellte Mersenne um 1630 folgende Proportionalität fest:

(2) $$f \sim \frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{A}} \ ,$$

welche die Abhängigkeit der Saitenfrequenz f von der Saitenlänge l, dem Querschnitt A und der Spannkraft F der Saite beschreibt. Die Rolle, welche die Größe „Frequenz" später noch spielen wird, scheint Mersenne zu ahnen, denn er sieht sie als „Prüfstein für alles, was Töne angeht"[68].

Trotz der brillianten Denkarbeit jener Forscher ist es nicht gelungen, ein Bewegungsgesetzt für Saiten aufzustellen - es fehlte dazu an der Fingerfertigkeit bei den mathematischen Grundlagen, die wiederum die Art zu denken und an mechanische Probleme heranzugehen, verändern und bereichern werden. Gemeint ist der Umgang mit der Infinitesimalrechnung, die, entstanden unter den Händen von Leibnitz und Newton, erst ein halbes Jahrhundert später zu wirklich großem Nutzen gebracht wurde.

Vorerst (1688-1689) versuchte sich unter anderem *Christiaan Huygens* an den Gesetzen von Saiten und Stäben, konnte aber nichts grundlegend Neues liefern. Eines muss man aber erwähnen: Huygens schaffte es, diejenigen Punkte zu berechnen, an denen ein Stab gelagert werden muss, damit er am reinsten klingt (allerdings aus einer rein statischen Sichtweise) und *überträgt somit das Knotenprinzip der Saiten auf Schwingungen fester Körper.* Seine Werte zeigen zusätzlich, dass die Knoten nicht äquidistant liegen können, also auch ein qualitativer Unterschied der Schwingungs*form* von Saiten zu denen von Stäben bestehen muss. Dass sich deren Verhältnisse der Obertöne unterscheiden war schon seit längerem allgemein bekannt und Mersenne konnte dies auch experimentell nachweisen.

Einen wichtigen Schritt für die nachfolgenden mathematischen Betrachtungen und die Gesetzmäßigkeiten der Kontinuumsmechanik hatte einige Jahre zuvor *Robert Hooke* (1635 - 1703) mit der Darlegung seines *Proportionalitätsgesetzes der Elastizität*

[67] Er geht dabei, wie die meisten seiner Zeitgenossen, von einer dreieckförmigen Auslenkung aus, was an der Richtigkeit seines Ergebnisses natürlich nichts ändert.

[68] …und kommt damit der Aussage sehr nahe: „Alles, dem man eine Frequenz zuschreiben kann, hat tonalen Charakter" - dieser Universalanspruch der frühen Akustik ist typisch für eine aufstrebende Wissenschaft, die ihre Bedeutung durch Ausweitung des Geltungsanpruchs zu festigen sucht.

gemacht, heute allgemein bekannt als Hooke'sches Gesetz.
Bevor es sich anbietet einen Schnitt zu machen, muss noch eine grade für unseren Blickwinkel wichtige Leistung vorgestellt werden, die nacheinander *Brook Taylor* (1685 - 1731) und *Johann Bernoulli* (1667 - 1748) erbrachten[69]. Zuvor war einiges über Knotenpunkte, ja sogar Knotenflächen geschrieben und spekuliert worden, ohne dass man dabei jedoch zu fruchtbaren Erkenntnissen kommen konnte. Die beiden verließen dieses Feld und wandten sich der Frage zu, welche Form die betreffende Saite zwischen zwei solcher Knoten annehmen kann. Beide - Taylor 1713 und Bernoulli 1727 - kamen zu dem Ergebnis, dass *nur eine Sinuskurve alle geforderten Bedingungen erfüllen kann* (und standen damit im Widerspruch zu allgemeinen Vorstellung, s. Ref. 67) und formulierten das, was sich heute als die zugehörige partielle Differentialgleichung der Bewegung lesen würde. Beide konnten die Formel für die Grundfrequenz der Schwingung richtig bestimmen, scheiterten aber daran, die allgemeine Lösung als Bewegungsgleichung aufzustellen, anhand derer sie auch die Obertöne hätten bestimmen können.
Trotzdem ist das Ergebnis bemerkenswert, denn auf dem Weg dorthin findet sich laut Truesdell „*die erste Anwendung des zweiten Newtonschen Prinzips auf kontinuierliche Körper*"[70].
Jetzt bietet es sich an innezuhalten und kurz zu resümieren, bevor die beiden Personen auf den Plan treten, deren Leistung und Genialität gegenüber Chladni Ehrerbietung erweisen werden wird - *Leonhard Euler* (1707 - 1783) und *Daniel Bernoulli* (1700 - 1782).
Man bemerkt, dass die letzten Probleme kaum mehr von einem (in unserem bisherigen Verständnis) akustischen Standpunkt gesehen wurden, sondern eher von einem statisch-mathematischen: *Die Beschäftigung mit Schwingungen und Schwingungsformen wird in der Mechanik untergliedert*.
Diese steht gerade in der Blütezeit, wird aber noch von großen Unklarheiten geplagt. Man hat große Probleme mit Körpern, die nicht nur durch Spannung elastisch sind - hier kann nur auf Annahmen und experimentelle Ergebnisse zurückgegriffen werden. Eine einheitliche Elastizitätstheorie, die es möglich machen wird, Schwingungsformen und elastische Materialeigenschaften in Beziehung zu setzen, wird erst unter

[69] Zuvor hat er mit seinem Bruder James in Zusammenarbeit mit Leibniz, l'Hôspital, Riccati u. a. viele der noch heute gültigen Methoden und Notationen der Differential- und Integralrechnung entwickelt. Dieses Wissen wandten viele von ihnen danach auf physikalische Probleme an. (vgl. [19], S. 149f)

[70] vgl. [24], S. 130

Euler aufgestellt werden.
Die Idee der Superposition ist seit längerem bekannt, wird aber in den mathematischen Herleitungen nicht als Grundprinzip beachtet, daher auch die Beschränkung auf die (erste) einfache Grundmode der Saite/des Stabs ohne dass die Idee eines Frequenzspektrums zu erkennen wäre. Trotzdem kann man behaupten, dass die Zeit reif war für die rasante Entwicklung, die folgt:
Es existiert jetzt ein *common ground* der Begriffe und Vorgehensweisen - die allgemeine Anerkennung von Newtons Erkenntnissen trägt dazu ebenso bei, wie der Frequenzbegriff und die Verfügbarkeit der mathematischen Handwerkzeuge.

Mechanik + Mathematik = Akustik ?

Wie schon angedeutet, spiegelt die ungewohnte Überschrift die Vorgehensweise der damaligen Zeit wieder: Akustische Fragestellungen werden als Schwingungsprobleme starrer (Stäbe, Balken etc.) oder flexibler (gespannte Saite, hängende Schnur) Körper mit den Methoden der Mechanik behandelt.
Natürlich entwickelte sich die Akustik auch unbeeindruckt von der mathematisch-mechanischen Betrachtungsweise weiter. Beispielsweise gibt es große Bemühungen, die Geschwindigkeit des Schalls genauer zu bestimmen und die Einflüsse äußerer Faktoren wie Temperatur, Druck, Luftfeuchtigkeit etc. mathematisch zu fassen. Viele Wissenschaftler dieser Zeit versuchten, das Newtonsche Dilemma der Schallgeschwindigkeit zu lösen: Seinen Berechnungen lag die (modern formulierte) Fehlannahme zugrunde, dass sich Luft beim Weiterleiten des Schalls isotherm ausdehnt. Sie lieferten daher konsequent einen um ca. 16% kleineren Wert, als es die Messungen forderten.
Zurück auf der mechanischen Seite stand man noch vor dem Problem eines adäquaten mathematischen Kalküls, das nicht nur die angegangenen Fragestellungen übersichtlich beschreiben, sondern auch einheitliche Lösungsverfahren liefern kann. Den Grundstein dazu bildeten Leibniz' partielle Differentialgleichungen, die „nur" noch mit dem newtonschen Blick für mechanische Probleme verquickt werden mussten. Genau das meisterte Euler im Laufe seiner Beschäftigung mit der Mechanik. Auf Basis seiner Anwendung des leibnizschen Kalküls konnten wiederum andere zu neuen Erkenntnissen kommen.
Anknüpfend an die Entdeckungen seines Onkels (s.o.), gelangte Daniel Bernoulli in enger Zusammenarbeit mit Euler im Jahre 1738 auf einem neuen Weg zu einer Formel für die Schwingungsform von Stäben und zu einem Ausdruck für die dabei auf-

tretenden Frequenzen. Auch hier wirkt noch die selbst auferlegte Beschränkung auf die Grundmode, die aber vier Jahre später fallen sollte. Dann sollte sich auch herausstellen, dass die *Obertöne keineswegs harmonisch zueinander* liegen, sondern dass ihre Verhältnisse zueinander in den meisten Fällen sogar irrational sind. Die Beobachtung, dass zum Grundton oft gleichzeitig einige Obertöne zu hören sind, führt aufs Neue zur Forderung, eine mathematische Formulierung der Schwingungsform zu finden, die eine *Koexistenz harmonischer Schwingungen* zulässt[71] - das schon bekannte Superpositionsprinzip wird von einem beobachteten Phänomen zum mathematischen Prüfstein beschreibender Theorien. Die Möglichkeit und Art der Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenz ist dann auch ein Kernthema in Chladnis Akustik. Dort versucht er für einige einfache Fälle die resultierende Schwingungsform zu konstruieren.

In der Art und Weise wie Bernoulli die Vorhersagen seiner Theorie prüft, findet man auch die ersten Ursprünge von Chladnis experimentellem Vorgehen beim Erzeugen der Klangfiguren auf Stäben. Er schreibt nämlich, dass er den Stab mit beiden Fingern hält, um einen Knoten zu erzwingen und dass er diesen Dämpfungspunkt so lange variiert, bis der Ton rein erscheint[72]. Leider macht er keine Aussage darüber, wie er den Ton erzeugt - die gängige Methode ist das Anschlagen mit einem Klöppel. Noch eine Eigenheit, die sich so auch bei Chladni findet, ist die Notation der Frequenzen als Vielfache des Grundtons.

Im Jahr 1759, Chladni ist zu jener Zeit 3 Jahre alt, betritt Euler inhaltlich wie mathematisch Neuland, indem er Lösungen für die *Schwingungsformen einer Membran* sucht und auch findet. Allerdings forscht er in diesem Bereich nicht weiter und macht auch keine Aussagen über Vorhandensein oder Form von stationären Knotenlinien, so dass deren Entdeckung tatsächlich allein Chladni zugeschrieben werden darf.

Einige Zeit später, im Jahr 1772, gelingt Euler dann der große Durchbruch und er ist nun in der Lage, eine korrekte, in heutiger Notation noch gültige Differentialgleichung für Stäbe mit beliebigem Querschnitt aufzustellen. Die alte Problemstellung aufgreifend kann er Lösungsverfahren angeben, mit denen man alle Schwingungsformen und die zugehörigen Frequenzen für einen beliebigen fixierten Punkt innerhalb des Stabes erhält.

Der nun auch mathematisch fassbare Effekt, dass ein fester Punkt nur ganz bestimm-

[71] vgl. [24], S. 197

[72] vgl. [24], S. 199

te Schwingungsformen zulässt, wird von Chladni immer dann ausgenutzt, wenn er bestimmte Klangfiguren durch das Dämpfen einzelner Punkte erzeugt[73].
Euler vervollständigte in dieser Arbeit auch die von Bernoulli begonnene Liste der *Haltevarianten* für die Enden des untersuchten Stabs. Er schlägt drei Grundtypen vor, die auch heute noch benutzt werden: fixiert, unterstützt und frei. Eine Erklärung dazu findet sich im folgenden Kapitel auf S. 50. Die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten bei zwei Stabenden beläuft sich damit auf 8. Die zugehörigen Frequenzverhältnisse, welche sich aus der Theorie ergaben, wurden später von Chladni in den „Entdeckungen“ und der „Akustik“ verifiziert.
Damit ist das Ende dieser Rückschau erreicht, die zum Ziel hatte, die grundlegenden Konzepte der Akustik vor Chladni aus heutiger Sicht darzustellen - immer mit dem Fokus auf ihre Bedeutsamkeit für Chladnis Versuche mit Klangfiguren.
Für eine Darstellung der Entwicklung der Akustik zu Chladnis Lebzeiten ist das Buch „Chladni und die Entwicklung der Akustik von 1750-1860“ von Dieter Ullmann sehr zu empfehlen. Es orientiert sich an den wichtigsten Entdeckungen dieser Periode und stellt ihre Einflüsse auf Chladnis Arbeit dar.
„Sounds of Our Times: Two Hundred Years of Acoustics“ von Robert T. Beyer wählt bezeichnenderweise die Veröffentlichung von Chladnis „Akustik“ als den Beginn seiner chronologischen Darstellung der Entwicklung der Akustik bis zur heutigen Zeit. Hier kann man sehr gut sehen, wie wenig sich trotz großer Fortschritte an Chladnis ursprünglicher Gliederung und Neuordnung der Akustik ändern wird.

[73] Hätte er konsequent auf Basis von Eulers Ergebnissen experimentieren wollen, hätte er zu jeder Figur die exakte Lage der Dämpfungspunkte angeben müssen. Dieses Vorgehen findet sich nur in Ansätzen und dann auch nur exemplarisch als Anleitung zum Erzeugen einiger weniger Figuren.

Physikalische Grundlagen der Klangfiguren

Varianten der Erzeugung von Klangfiguren

Ganz am Anfang der Untersuchung des Phänomens der Klangfiguren steht deren Erzeugung - also die Art und Weise die Platte in Schwingung zu versetzen, so dass sich überhaupt Knotenlinien ausbilden können. In der Literatur bin ich auf drei verschieden Methoden gestoßen, die dies leisten können. Neben der Anregung durch einen Kontrabassbogen, wie Chladni es tat, findet man z.B. bei Waller die Nutzung von Trockeneis (gefrorenes Kohlenstoffdioxid - CO_2). Gut reproduzierbare Ergebnisse erhält man auch, wenn man die Platte direkt durch eine Sinusschwingung anregen kann. Dazu befestigt man sie beispielsweise auf einem Shaker. Das ist eine Art Lautsprecher, der in der Lage ist, schwerere Objekte als die gewöhnlichen Lautsprechermembranen zu bewegen. Prinzipiell lassen sich dafür auch Piezoelemente oder Linearmotoren einsetzen. Diese Methode hat den Vorteil, dass sich Anregungsfrequenz und Amplitude exakt vorgeben lassen, zum Beispiel über einen Funktionsgenerator gekoppelt mit einem passenden Verstärker.
Alle haben sie gemein, dass es sich um sog. *erzwungene Schwingungen* handelt. Warum das nur für die letztgenannte Methode ganz zutrifft, werden wir später sehen. Jetzt sollen erst einmal die grundlegenden physikalischen Effekte dargestellt werden, die jeder dieser Methoden eigen sind.
Das Anregen einer Schwingung durch einen Bogen beruht auf dem sog. Stick-Slip-Effekt. Wie der Name schon andeutet findet beim Streichen des Bogens ein ständiger Wechsel zwischen haften („stick“) und gleiten („slip“) statt. Man nennt den Vorgang auch „Ruckgleiten“. Er beruht darauf, dass der Haftreibungskoeffizient meist einen größeren Wert hat, als der der Gleitreibung[74]. In unserem Fall heißt das, der Rand der Platte haftet zunächst an der Bespannung des Bogens[75]. Infolge des Streichens wird die Platte an dieser Stelle gebogen. Dies geschieht so lange, bis die durch die Elastizität der Platte hervorgerufene Rückstellkraft groß genug ist, die Haftreibung zu überwinden. Jetzt erfolgt ein spontaner Übergang ins Gleiten. Die durch die Gleitreibung verursachte Kraft auf den Plattenrand ist aber viel geringer, so dass er zurückschnellen kann. Zwei Effekte verlangsamen nun diese Bewegung wieder.

[74] Oft wird diese Differenz erst durch Auftragen von Kolophonium-Harz auf die Bespannung groß genug.

[75] Nur wenn man den Bogen vor dem Streichen auflegt, andernfalls beginnt es mit einem Gleitvorgang.

Zum einen ist es natürlich die Elastizität der Platte und zum anderen die jetzt wirkende Gleitreibung. Beide tragen dazu bei, dass sich der Plattenrand irgendwann wieder in Richtung der Bespannung bewegen muss. Hat der Rand die Streichgeschwindigkeit erreicht, kann er wieder anhaften[76] und der Vorgang kann von neuem beginnen. Anhand dieser Beschreibung des Vorgangs sieht man leicht ein, dass nur bestimmte Kombinationen von Streichgeschwindigkeit, Elastizität und Andruckkraft diesen Effekt überhaupt zulassen.
Der Stick-Slip-Effekt tritt im Alltag ständig und fast überall da auf, wo man Quietschen oder Knarzen hören kann. Zu nennen sind da beispielsweise die Kreide an der Tafel, Schuhe, Stühle oder Bremsbacken. Während man ihn bei technischen Anwendungen normalerweise zu vermeiden versucht, fand er in kontrollierter Form bei den ersten Ultraschallmotoren Anwendung. Durch Beschichtung der Reibflächen mit Polytetraflourethylen (PTFE, Teflon), dessen Haft- und Gleitreibungskoeffizienten nahezu gleich sind oder die Verwendung von Schmiermitteln, kann man den Effekt heutzutage nahezu vollständig ausschalten.
Die nächste Methode der Schwingungsanregung hat im Vergleich zu der genannten einige Vorteile, ist aber auch weitaus diffiziler in der Handhabung. Es handelt sich um das Anregen durch Trockeneis, bei dem man ein Stück gefrorenes CO_2 auf die Platte drückt. Dass diese dabei zu schwingen beginnt, erklärt sich folgendermaßen: Trockeneis hat eine Temperatur von ca. -78°C und geht bei Kontakt mit Luft oder anderen genügend wärmeren Gegenständen unter Normaldruck sofort in die gasförmige Phase über - es sublimiert. Normalerweise sorgt ein kühlender Film von gasförmigem CO_2 dafür, dass dies nicht explosionsartig geschieht. Drückt man das Eis allerdings auf einen warmen Gegenstand wie die Platte, erfolgt der Übergang spontan. Das freigesetzte CO_2 - Gas nimmt ein viel größeres Volumen ein und stößt Platte und Eisstück auseinander. Dadurch unterbricht der Vorgang, bis Eis und Platte sich wieder berühren und das Ganze von vorne beginnt. Diese Methode ist der vorherigen insofern überlegen, als dass der Punkt der Anregung auf der Platte frei gewählt werden kann und man nicht auf den Rand beschränkt ist[77]. Allerdings hängt hier die Frequenz wesentlich stärker noch als beim Bogen von der Andruckkraft ab, so dass

[76] In [44] wird gezeigt, dass das so eigentlich nicht stimmt. Das betrachtete System kann sowohl mit als auch ohne wieder eintretende Haftung oszillieren.

[77] Man findet auch die Variante, die Bespannung des Bogens durch ein Loch in der Platte zu führen und sie so auch innerhalb anzuregen. Diese Methode ist jedoch sehr unpraktisch, da ein Loch die elastischen Eigenschaften der Platte verändern kann und zudem an einen Punkt der Platte gebunden ist.

die Verwendung von Trockeneis im Hinblick auf das gezielte Erzeugen der gewünschten Klangfigur um einiger diffiziler sein müsste.
Mit der dritten und modernsten Methode erhält man gut reproduzierbare, sehr schöne Klangfiguren, d.h. Figuren mit sehr scharf begrenzten Linien (Hier kann man die der Figur zugehörige Frequenz je nach Versuchsanordnung direkt ablesen.) Der zugehörige Aufbau ist meist so beschaffen, dass die Platte in irgendeinem inneren Punkt an dem eingangs erwähnten Shaker befestigt wird und ansonsten frei schwingen kann. Das hat allerdings den Nachteil, dass nur Figuren erzeugt werden können, die am Befestigungspunkt einen Schwingungsbauch besitzen. Prinzipiell ist aber auch ein Aufbau denkbar, bei dem der Anregungspunkt variabel ist.

Erzwungene Schwingungen, Eigenfrequenzen und Resonanz

Bei den bisher vorgestellten Methoden der Anregung wird immer einem prinzipiell zu Schwingungen fähigen System (hier: der Platte) eine von außen vorgegebene Schwingung aufgezwungen. Die Reaktion des Systems darauf nennt man daher *erzwungene Schwingung*. An einem einfachen Beispiel lässt sich erkennen, welche Effekte dabei eine Rolle spielen und wie sie zur Entstehung von Klangfiguren beitragen.
Am Anfang steht ein einfaches, ungedämpftes Federpendel.
Um die Bewegungsgleichung aufstellen zu können, müssen wir zuerst die auftretenden Kräfte bestimmen. Bei Auslenkung x(t) aus der Ruhelage übt die Feder auf die angehängte Masse die Rückstellkraft

(3) $$F_R = D \cdot x(t)$$

aus, wobei D die Federkonstante darstellt. Die in Bewegung befindliche Masse übt ihrerseits die Trägheitskraft F_T aus mit

(4) $$F_T = m \cdot \ddot{x}(t)\,.$$

Beachtet man die Richtungen der Kräfte, ergibt sich für das Kräftegleichgewicht folgende Bewegungsgleichung:

5) $$m\ddot{x}(t) + Dx(t) = 0$$

Diese wird z.B. gelöst durch:

(6) $$x(t) = x_0 \sin(\omega_e t) \qquad \text{mit} \qquad \omega_e = \sqrt{D/m}$$

Für eine bestimmte Masse und Federkonstante schwingt das Pendel also mit der Kreisfrequenz ω_e. Diese nennt man *Eigen-Kreisfrequenz.*
Im nächsten Schritt soll das Pendel am Aufhängepunkt periodisch angeregt werden. Dies lässt sich beispielsweise durch eine äußere Kraft F_a mit $F_a(t) = a_0 \cdot \sin(\omega_a \cdot t)$ errei-

chen. Dabei ist a_0 die Amplitude und ω_a die Kreisfrequenz der Anregung. Damit lässt sich die Bewegungsgleichung schreiben als

(7) $$m\ddot{x}(t) + Dx(t) = a_0 \cos(\omega_a t)$$

Das ist einfach eine inhomogene Variante von (X), daher setzt sich die Lösung zusammen aus der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung (X) mit

(8) $$x_h(t) = A \sin(\omega_e t) + B \cos(\omega_e t)$$

und einer speziellen Lösung $x_s(t)$ der inhomogenen Gleichung (X) mit

(9) $$x_s(t) = \frac{a_0 / D}{1 - \omega_a^2 / \omega_e^2} \sin(\omega_a t)$$

Wie stark das System auf die Anregung reagiert, wird ganz offensichtlich durch den Nenner im ersten Term von (9) bestimmt. Für Anregungsfrequenzen weitab der Eigenfrequenz bleibt sein Einfluss relativ gering, wohingegen die Amplitude für $\omega_a \to \omega_e$ gegen unendlich strebt. Diese Reaktion des Systems wird *Resonanz* genannt. In diesen Zusammenhang gehört auch die sog. Resonanzkatastrophe, die eintritt, wenn die Resonanz so viel Bewegungsenergie freisetzt, dass sie das System selbst über die Belastungsgrenze bringt und zerstört.

Berücksichtigt man die Reibung, zeigt sich, dass die Amplitude zwar nicht mehr beliebig groß, aber im Resonanzfall immer noch um ein Vielfaches größer werden kann als die der anregenden Schwingung.

Jetzt lässt sich auch klären, warum eigentlich nur die dritte Anregungsmethode für Klangfiguren zu erzwungenen Schwingungen führt - nur hier existiert tatsächlich eine periodische Erregung, die unabhängig von der Antwort des Systems ist. Die ersten beiden Varianten hingegen funktionieren durch Rückkopplung, so dass gar keine explizite Anregungsfrequenz existiert. Stattdessen muss man hier von einer *selbsterregten Schwingung* sprechen.

Zur Rolle der Eigenfrequenzen

Das angesprochene Federpendel eignet sich als Beispiel nur begrenzt, da es nur genau einen Freiheitsgrad und nur eine einzige Eigenfrequenz besitzt. Viel eher drängt sich ein Vergleich mit einer schwingenden Saite auf, doch auch hier ist Vorsicht geboten. Saiten besitzen zwar unendlich viele diskrete Eigenfrequenzen, doch diese sind im Gegensatz zu denen einer Platte harmonisch gestaffelt. Das bedeutet, dass alle Eigenfrequenzen ganzzahlige Vielfache der ersten möglichen sind. Letztere wird auch *Grundschwingung* und alle Vielfachen *n*te *Oberschwingung* genannt. Warum das so ist, kann man sich schnell klar machen. Für die Saite gilt die allgemeine Wellen-

gleichung mit

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{10}$$

Dabei ist *y(x,t)* die Auslenkung der Saite am Ort *x* und *c* die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle. Bezeichnet man die Länge der Saite mit *l*, so findet an den Punkten *x = 0* und *x = l* keine Auslenkung statt - die Saitenenden sind fest. Es handelt sich also nicht mehr um eine fortschreitende Welle und man kann die zeitabhängige Komponente abtrennen. Die Auslenkung ergibt sich daher zu

$$y(x) = const \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{11}$$

Einsetzen in (10) liefert ein Spektrum von Eigenkreisfrequenzen ω_n mit

$$\omega_n = c\frac{n\pi}{l} \tag{12}$$

Stäbe anstelle von Saiten besitzen nicht nur ein unharmonisches Spektrum, auch die Krümmung verläuft nicht sinusförmig. Das rührt daher, dass Stäbe nicht durch Zug elastisch werden wie - im Idealfall - Saiten, sondern durch ihre innere Steifigkeit der Auslenkung entgegenwirken. Dementsprechend lässt sich auch keine so einfache Bewegungsgleichung wie (10) herleiten, die darauf setzt, dass die rücktreibende Kraft infolge einer Auslenkung nur durch tangential wirkende Kräfte hervorgerufen wird. Dann gilt beispielsweise für die Eigenfrequenzen eines kreiszylindrischen Stabes mit Radius *r*:

$$\omega_n \approx \frac{\pi^2 r}{2l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{13}[78]$$

E: Elastizitätsmodul
ρ: Dichte

womit sie sich ungefähr so zueinander verhalten wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. All diese Schwingungsphänomene haben gemein, dass sich bei Anregung einer Eigenfrequenz sog. *stehende Wellen* ausbilden. Wie oben schon kurz angesprochen, handelt es sich um stationäre Wellen, deren Fortschreiten durch die Randbedingungen verhindert wird. Das bedeutet auch, dass es dabei Punkte geben muss, die außer einer Rotation keine Bewegung ausführen, sowie Punkte maximaler Schwingung dazwischen. Erstere sind die sog. *Schwingungsknoten*, letztere werden *Schwingungsbäuche* genannt.

Jetzt haben wir den schwingenden Massepunkt und die Eigenfrequenzen eines einfachen eindimensionalen Systems betrachtet. Der Übergang zu schwingenden Flächen soll im folgenden Kapitel kurz angedeutet werden.

[78] vgl. [45], S. 186

Die Theorie der Flächenschwingungen

Ganz analog zu den Schwingungspunkten und -bäuchen kann man sich bei einer schwingenden Fläche Bereiche vorstellen, die immer dann nach oben ausgelenkt werden, während sich benachbarte Bereiche gerade nach unten bewegen. Auch hier werden sich diese Bereiche nicht gegeneinander verschieben, so lange die Frequenz der Schwingung sich nicht ändert. Zwischen ihnen existieren dann Linien, die keine andere Bewegung als Rotation ausführen. Dies sind dann die Stellen, an denen sich aufgestreuter Sand anhäufen wird, da er von den schwingenden Bereichen immer wieder abprallt.

Eigenfunktionen einer Membran

Als zweidimensionale Entsprechung einer gespannten Saite möchte ich hier die Bewegungsgleichung und die Eigenfrequenzen einer Membran, z.B. der einer Pauke, herleiten. Dazu benötigt man zuerst einen Ausdruck für die Rückstellkraft eines ausgebeulten Flächenstückes *dA*. Charakterisiert man diese Ausbeulung über zueinander senkrechte Haupkrümmungsradien R_x und R_y der Beule und die angreifende Kraft an den Rändern durch die Spannung σ wird die Rückstellkraft zu:

$$dF_R = \sigma\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)dA \tag{14}$$

Für kleine Auslenkungen kann man die Kehrwerte der Krümmungsradien durch die partiellen zweiten Ableitungen der Auslenkung *w(x,y,t)* in die jeweilige Richtung ersetzen. Daraus folgt:

$$dF = \sigma\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,y,t)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}w(x,y,t)\right)dA = \sigma\cdot\Delta w\cdot dA \tag{15}$$

Über die Beziehung $dm = \delta \cdot dA$ (mit δ als Dichte und *dm* als Masse des Flächenstücks) gelangt man zu einem Ausdruck für die Beschleunigung:

$$\ddot{w} = \frac{dF}{\delta dA} \Leftrightarrow dF = \ddot{w}\cdot\delta\cdot dA \qquad mit \qquad \ddot{w} = \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{16}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt dann die Bewegungsgleichung

$$\Delta w = \frac{\delta}{\sigma}\ddot{w}\,, \tag{17}$$

die sich wieder als Wellengleichung mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit $\sqrt{\sigma/\delta}$ darstellt.

Wir stellen folgende Forderung an die Form der Lösung *w(x,y,t)*:

(18) $$w(x,y,t) \stackrel{!}{=} u(x,y) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Das bedeutet nur, die Lösung soll sich an einem festen Ort *(x,y)* verhalten wie eine periodische Schwingung mit der Frequenz ω, dem Phasenwinkel φ und der ortsabhängigen Amplitude *u(x,y)*. Wie schon im vorigen Kapitel lässt sich die Sinusfunktion nach Einsetzen in (X) abtrennen und man erhält:

(19) $$\Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot u$$

Der Einfachheit halber soll die betrachtete Membran rechteckig sein mit den Kantenlängen l_x und l_y. Damit lassen sich auch gleich die Randbedingungen aufstellen. Für den Fall, dass die Membran an allen Seiten eingespannt ist, findet an den Kanten keine Auslenkung statt und es muss gelten:

(20) $$u(x,0) = u(0,y) = u(l_x,y) = u(x,l_y) \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Bedingungen lassen sich erfüllen wenn man annimmt, dass $u(x,y) = const \cdot u_1(x) \cdot u_2(y)$. Ohne im Einzelnen auf den Lösungsweg einzugehen lauten mögliche Eigenfunktionen folgendermaßen:

(21) $$u_{m,n}(x,y) = const \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l_y}y\right)$$

Dabei sind n und m natürliche Zahlen. Die Lösung lässt sich so interpretieren, dass in eine Richtung der Membran immer nur eine ganze Anzahl an Halbwellen der jeweiligen Sinusfunktion hineinpasst. Einsetzen in (19) liefert sofort die Eigenkreisfrequenzen:

(22) $$\omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2}}$$

Zu diesem Ergebnis kam Euler laut Truesdell schon 1759, so dass Chladni sicherlich davon wusste und sich daran orientieren konnte. Auch wenn es sich hier „nur“ um Membranen handelt, könnte man aus den letzten beiden Gleichungen schon eine Rechtfertigung dafür ableiten, warum Chladni die Ergebnisse seiner Experimente über Klangfiguren ausgerechnet nach der Anzahl der Knotenlinien parallel zu den Seiten der Platte ordnete. Die Parameter *n* und *m* bestimmen nicht nur die Anzahl dieser Knotenlinien, sondern auch die Werte der Eigenfrequenzen, so dass diese sich für festes *m* oder *n* zueinander verhalten wie die Quadrate der ganzen Zahlen und für *m* = *n* wie die Quadrate der graden Zahlen.

An gleicher Stelle schreibt Truesdell auch:

> „…we might reasonable expect some discussion of the form of the nodal lines, the relation of these to the proper frequencies, and the possible effects of superposing several modes […], but of these there is no trace. […] Euler's theory is entirely correct but not developed." [24], S. 334

Die Kritik, die er damit äußert, ist verständlich, da Euler als einer der Ersten dieses Gebiet betrat und mit mathematischer Genialität schnell zu richtigen Resultaten gelangte, diese dann aber weder ausarbeitete noch anderweitig verfolgte, so dass schließlich Poisson, obwohl erst 80 Jahre später auf dem gleichen Weg zu wenig mehr als den selben Erkenntnissen gelangend, als Begründer der Membrantheorie in Erinnerung blieb.

Zumindest Euler vernachlässigte dabei noch den Effekt der *Superposition*, also der möglichen Überlagerung verschiedener Eigenfunktionen, die trotzdem noch alle Randbedingungen erfüllen und dazu dieselbe Eigenfrequenz aufweisen. Letzteres Phänomen wird auch *Entartung* genannt. Man sieht schnell, dass sich bei Gleichheit von l_x und l_y (das entspricht einer quadratischen Platte) immer „Entartungspaare" $u_{m,n}(x,y)$ und $u_{n,m}(x,y)$ ergeben, da die zugehörigen Eigenfrequenzen $\omega_{m,n}$ und $\omega_{n,m}$ gleich sind[79]. Wird noch der Tatsache Rechnung getragen, dass auch jede Linearkombination dieser Paare wieder Bedingung (X) erfüllt, ergibt sich eine neue Klasse von Lösungen $\tilde{u}_{i,j}(x,y)$ mit

$$\tilde{u}_{i,j}(x,y) = c_1 \cdot \sin\left(\frac{i\pi}{l_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{l_y}y\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{l_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{i\pi}{l_y}y\right), \tag{23}$$

wobei diese Lösungen in Chladnis Notation die gleiche Konfiguration von Knotenlinien aufweisen, wie ihre einzelnen Summanden. Die Form dieser Knotenlinien dagegen ändert sich durch Kombination erheblich, wie folgende Bildbeispiele für diese Membran zeigen.

[79] Allgemein gilt, dass zwei beliebige Eigenfunktionen $u_{n,m}(x,y)$, $u_{k,l}(x,y)$ entartet sind, wenn für die zweite gilt $l \in \mathbb{N}$ und $k^2 = n^2 + \frac{m^2 {l_x}^2 - l^2 {l_x}^2}{{l_y}^2}$. Der Fall $l = n$ und $k = m$ für die quadratische Platte ist hierin also auch enthalten und dadurch ebenso (23).

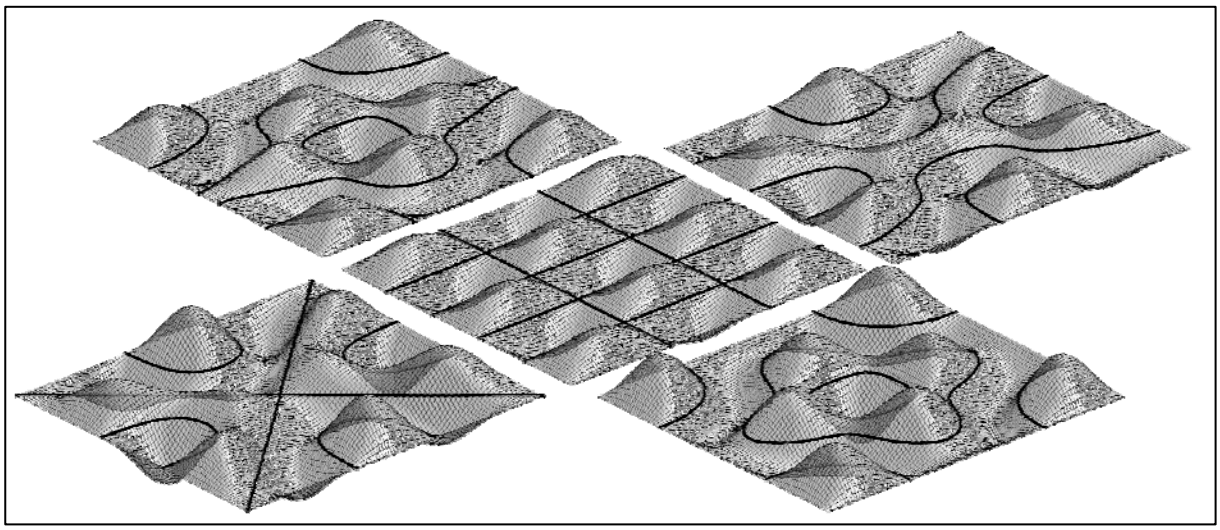


Abb. 5: Entartete Eigenfunktionen nach (X), wobei $l_x = l_y = 1$, $i = 5$ und $j = 3$.
mittig: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$; u. l.: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$; u. r.: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$
o. l.: $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$; o. r.: $c_1 = 0.5$, $c_2 = -1$

Die Schwingungsformen im Bild sehen denen, die Chladni in seinen Büchern darstellt, schon sehr ähnlich. Die beiden Varianten *u. l.* und *u. r.* finden sich in seinen *Neuen Beyträgen* unter der Notation $\underline{4|2}$ resp. $\overline{4|2}$[80]. Da Chladni die Linien zählt und nicht die Schwingungsbäuche, ist es klar, dass man zum Modellieren durch Gl. (23) zu seinen Werten jeweils +1 hinzufügen muss.

Zu der ursprünglichen Schwingungsform, wie sie in der Mitte von Abb. 5 zu sehen ist, bemerkt er: „$4|2$ erscheint nie mit geraden Linien […]. Der Unterschied [der Eigenfrequenzen von $\underline{4|2}$ zu $\overline{4|2}$, d. A.] beträgt beynahe einen halben Ton“[81]

Das ist erstaunlich, denn nach den bisherigen Ergebnissen an der Membran war anzunehmen, dass diese beiden Varianten die gleiche Eigenfrequenz besitzen. Geht man von einem glatten Halbtonunterschied aus, könnte man Chladni unterstellen, dass seine Platte um fast 5% von der quadratischen Form abwich (s. Ref. 79). Hier merkt man, dass der Analogieschluss über die Membrantheorie bestimmte Probleme nicht erklärt, da beispielsweise die innere Steifigkeit der Platten nicht berücksichtigt werden kann. Aus diesem Grund stellt das folgende Kapitel einen kurzen Einstieg in die Plattentheorie vor, wie sie 1850 von Kirchhoff entwickelt wurde und die unser Problem lösen könnte.

[80] zur Erläuterung der Notation s. S.60

[81] [9], *Neue Beyträge* S. 24

Die kirchhoffsche Plattentheorie

Diese erste und grundlegende Theorie über das Biegeverhalten von elastischen Platten hat auch den Namen *lineare Plattentheorie*. Bei ihr wird davon ausgegangen, dass sich der Zusammenhang zwischen den auftretenden Spannungen und den hervorgerufenen Verzerrungen durch eine lineare Gleichung fassen lässt, dem sog. Hooke'schen Gesetz. Diese Theorie behält ihre Gültigkeit nur für relativ dünne Platten und geringe Auslenkungen. Weiterhin muss das Material der Platte homogen, isotrop und ideal elastisch sein. Das eigentlich dreidimensionale Problem wird auf zwei Dimensionen reduziert, indem zusätzlich angenommen wird, dass eine neutrale Mittelfläche innerhalb der Platte existiert, für die folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

1. Jedes infinitesimale Stück dieser Fläche erfährt außer der Biegung keine weiteren Verzerrungen.
2. Linien, die vorher senkrecht auf diesen Flächenstücken standen, tun dies auch nach dem Verbiegen.

Daraus folgt natürlich auch, dass sich Punkte dieser Ebene höchstens auf und ab bewegen dürfen. Bei all diesen Voraussetzungen muss man nicht verwundert sein, wenn die Bewegungsgleichung einer solchen Platte derjenigen der Membran sehr ähnelt. Sie lässt sich (mit einigem Aufwand[82]) herleiten zu:

D: Biegesteifigkeit der Platte
ρ: Dichte '' ''
d: Dicke '' ''

$$\Delta\Delta w = \frac{-\rho d}{D} \cdot \ddot{w} \tag{24}$$

Auch hier kann man den Separationsansatz verwenden und erhält als zeitunabhängige Variante:

$$\Delta\Delta u(x,y) = \frac{\rho d\,\omega^2}{D} \cdot u(x,y) \tag{25}$$

Eine Gleichung dieser Form hatte auch Sophie Germaine vorgelegt, doch sie scheiterte (unter anderem) an den passenden Randbedingungen, die eine eindeutige Lösung überhaupt erst zulassen. Die Randbedingungen geben diesem eigentlich mathematischen Problem erst den physikalischen Bezug, indem konkrete Beschränkungen umgesetzt werden in Bedingungen, welche die gesuchte Lösung am Rand ihres Definitionsbereichs erfüllen muss. In diesem Fall ist *u(x,y)* die gesuchte Lösung und die Ränder entsprechen den Kanten der Platte. Man unterscheidet üblicherweise zwischen vier unterschiedlichen Randbedingungen, von denen immer eine an einer

[82] siehe z.B. [21], [35], [36]

Kante erfüllt sein muss:

1) Fixiert:	Rotation und Auslenkung der Kante sind verboten
2) Unterstützt:	Auslenkung der Kante ist verboten („gelenkig gelagert“)
3) Frei:	Rotation und Auslenkung erlaubt, spezielle Randbedingungen nötig (Kirchhoff-R.)

Man sieht leicht, dass sich bei vier Kanten viele Kombinationsmöglichkeiten ergeben. Von diesen besitzen nur die Fälle „alle Kanten fixiert“ und „alle Kanten unterstützt“ eine geschlossene Lösung.

Chladnis Untersuchungen sind nach diesem Schema Untersuchungen an allseitig freien Platten. Dieser Fall hat sich als der schwierigste herausgestellt, da eine Fülle von verschiedenen Ansätzen für die Form von $u(x,y)$ die Randbedingungen erfüllen. Die meisten Ansätze sind von der Form

(26) $$u(x,y) = \sum_{m,n} a_{mn} u_{1m}(x) u_{2n}(y)$$

und lassen gewisse Analogien zur Membrantheorie erkennen. Die Funktionen $u_{1m}(x)$ und $u_{2n}(y)$ sind frei wählbar, solange sie für alle m und n die Randbedingungen erfüllen. Exakte Lösungen sind auf diese Art unmöglich, da die Summation irgendwann abgebrochen werden muss. Für die Berechnung der Koeffizienten gibt es mittlerweile viele Methoden, von denen die meisten Energiebetrachtungen heranziehen. Diese liefern dann auch Ausdrücke für die Eigenfrequenzen.

Gebräuchlich ist heute die Methode, die o. g. Funktionen als Eigenfunktionen des schwingenden Balkens zu identifizieren.

Die Grundidee, dass das Biegeverhalten von Platten dem von einfachen Stäben ähnlich ist, benutzte schon Chladni. Er gewann sein Proportionalitätsgesetz hauptsächlich durch Versuche an Stäben.[83] Deren Eigenfunktionen haben die Eigenschaft, nur dann Lösungen in Form von einfachen trigonometrischen Funktionen zu besitzen, wenn beide Enden fest sind (analog zu Saiten). Da nur diese Form der Lösung zu Entartungspaaren wie in der Membrantheorie führen kann, liegt hierin die Erklärung für die unterschiedlichen Eigenfrequenzen solcher Paare auf Platten, die ja im Gegensatz dazu bei Chladnis Versuchen als frei gelagert angesehen werden müssen.

[83] Johann II. Bernoulli trieb dieses Prinzip allerdings zu weit, indem er die Bewegungsgleichung aufstellen wollte unter der Annahme, eine Platte sei nichts anderes als ein Netzwerk von Stäben. Er gelangte zu Ergebnissen, welche in Widerspruch zu Chladnis Beobachtungen standen.

Das Erstaunen, welches Chladni gegenüber dieser Eigenschaft zeigt, könnte darauf beruhen, dass er sich zu stark an die Membran-Analogie klammerte und die speziellen Eigenschaften der Lösung für schwingende Stäbe außer Acht ließ. Als Bewunderer Eulers wusste er natürlich von dessen Lösung dieses Schwingungsproblems. Eine kritische Berücksichtigung bei seinem Untersuchungsgegenstand dürfte seinen mathematischen Horizont jedoch überschritten haben, wie folgende, sehr ehrliche, Bemerkung erahnen lässt:

> „Der Abstand der Töne […] ist nicht an allen Scheiben derselbe, und hängt sehr von dem Verhältnisse der Größe und der Dicke der Scheibe ab. Wie dass Verhältnis der Größe zur Dicke nicht blos auf die Höhe und Tiefe der Töne im Allgemeinen, sondern auch auf die Abänderung der Verhältnisse unter sich würken könne, begreife ich nicht“ ([9], *Neue Beyträge*, S. 20)

Demnach resultiert Chladnis Suche nach einfachen Regelmäßigkeiten in der Folge der Eigenfrequenzen aus dem Fehlen des tieferen mathematischen Verständnisses der vorher aufgestellten Theorien. Er versuchte, angespornt von der Anwendbarkeit dieser Methode bei runden Platten[84], die Schwingungszahlen[85] als Produkt kleiner, ganzer Zahlen darzustellen und deren Fortschreiten mit Hilfe einfacher mathematischer Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben. Ullman schreibt dazu:

> „Er tat das, obwohl durch die Theorie von Euler über die Biegeschwingungen von Stäben gesichert war, dass die möglichen Frequenzen unharmonisch zueinander liegen. Man musste also davon ausgehen, dass das auch bei den Biegeschwingungen von Platten der Fall sein würde“([17], S. 133)

[84] Dies ist nebenbei bemerkt nur ein glücklicher Zufall, der auf der besonderen Geometrie dieser Platten beruht.

[85] Mit Schwingungszahl ist die *relative* Frequenz eines Tones gemeint, bezogen auf einen willkürlich gesetzten Grundwert.

Klangfiguren - Nachvollzug einiger Experimente

Ziel dieser Arbeit soll es gerade nicht sein, Chladnis wissenschaftliche Ergebnisse aufs Neue zu überprüfen. Stattdessen sollen mit den Mitteln eines Nachvollzugs ausgewählter Experimente das Vorgehen und die Arbeitsweise Chladnis nachvollzogen werden. Dabei lassen sich natürlich auch Rückschlüsse auf die Person Chladni als Mensch und Wissenschaftler, sowie auf die historischen Umstände seiner Entdeckungen ziehen. Dies ist gewollt und Teil der Nachvollzugsmethode, die es somit erlaubt, sich ein lebendiges Bild bestimmter Stationen der Wissenschaftsgeschichte zu machen, ohne den gewohnten Abstand wahren zu müssen.

Analyse des historisches Vorgehens

Ich habe mich dazu entschlossen, mich Chladnis Versuchen an schwingenden Platten durch die eingangs erwähnte Methode zu nähern. Deshalb sind im Vorfeld einige Fragen zu seinem Vorgehen zu klären, um mich möglichst gut der historischen Vorgabe nähern zu können. Zunächst stellt sich die Frage nach Eigenschaften der von Chladni verwendeten Platten, also nach Material, Form, Dicke und den Flächenmaßen.

Danach muss geklärt werden, wie Chladni vorging, um die Figuren zu erzeugen. Das schließt ein: die Art und Weise der Anregung, der Fixierung und Abdämpfung der Platten und schließlich der Sichtbarmachung der Figuren. Antworten darauf geben hauptsächlich zwei Quellen. Zum einen existiert in der *Akustik* eine Anleitung von Chladni selbst, und zum anderen hat im Jahr 1796 ein Zeitgenosse Chladnis, Johann Gottfried Voigt, diese Anleitung noch etwas erweitert in seinem „Beytrag zu den Versuchen über die Klangfiguren schwingender Flächen“.

Zu den Eigenschaften der Platten

Chladni spricht hauptsächlich von gläsernen, seltener von metallenen Platten, „allenfalls lassen sich sogar die Schwingungen einer hölzernen Scheibe sichtbar machen“. Beim Metall wird es sich höchstwahrscheinlich um Messing gehandelt haben, da Chladni dies einige Male als geeignet erwähnt. Vorstellbar ist auch, dass er für einige Experimente Glockenbronze (Zinnbronze) verwandte, da diese hervorragende Schwingungseigenschaften besitzt - sie ist sehr zäh und elastisch, also mit nur geringer Dämpfung leicht anzuregen.

Es ist darauf zu achten, dass die Platte homogen und überall gleich dick ist. Die Oberfläche muss so eben wie möglich sein. Zu den Maßen für runde Platten schreibt

Chladni: „[…] die kleinsten können etwa 3 Zoll im Durchmesser seyn, die größten, deren ich mich bedient habe, waren etwas über eine Dreßdner Elle im Durchmesser." Das deckt sich erwartungsgemäß mit den Angaben Voigts: „Uebrigens muß man, besonders bey Erlernung der Versuche, Glasscheiben von verschiedener Größe und Form haben, z.B. kreisrunde Scheiben von 4 Zoll bis 12 Zoll im Durchmesser." Die uneinheitlichen Längenmaße können da zu Verwirrung führen[86]. Unter der Annahme, dass Chladni, wenn er von der Dresdner Elle spricht, allgemein die sächsischen Maßeinheiten heranzieht, liegt der Durchmesser ungefähr zwischen 7,1 cm und mehr als 56 cm, bei Voigt zwischen 9,4 cm und 26,3 cm. Handelt sich bei letzterem um den preußischen Zoll von 1755, entspricht das einem Durchmesser von ca. 10,5 cm bis 31,4 cm. Für die quadratischen Platten findet man keine Maße - vielleicht dienten ja die Durchmesser oder die Flächenmaße der runden Platten als Anhaltspunkt.

Werte für die Plattendicke finden sich nirgends. Für Glasscheiben hat man nur Voigts vage Aussage:

> „Im Allgemeinen kann man behaupten, daß eine Scheibe desto besser zu diesen Versuchen taugt, je dünner sie ist, doch giebt es hierin eine Grenze. Bey kleinen Scheiben, wie kreisrunde, die nicht über 6 Zoll im Durchmesser haben, ist der Satz allgemein wahr, aber bey größeren schadet eine zu große Dünne gar sehr."

Dies ist wahr insofern, als dass in der damaligen Zeit sehr dünnes Glas nur schwer herzustellen war und dabei an Regelmäßigkeit und Bruchfestigkeit zu wünschen übrig ließ. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Dicke zwischen einer halben Linie und zwei Linien gelegen haben wird. Eine Linie entspricht 1/12 Zoll, somit hat man Plattendicken zwischen ca. 1 mm und 4 mm resp. 1,1 mm und 4,4 mm. Überdies behindern stärkere Platten die Ausbildung der meisten komplexeren Klangfiguren, da sie eine hohe innere Dämpfung aufweisen.

Chladni führt weiterhin zwei Gründe an, weswegen er die Glas- den Metallplatten vorzieht:

> „[…] weil man Scheiben von Metall, oder von irgend einer anderen Materie schwerlich

---

[86] - 1 Preußischer Zoll (≙ 1/12 P. Fuß) = 0,0261545 m
- 1 Sächsischer Zoll (≙ 1/12 S. Fuß) = 0,0235992 m
- 1 Sächsische Elle = 0,56638 m

i) http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/fakultaet_architektur/ila/gla/dateien/masseinheiten.pdf (31.05.2007)

ii) http://de.wikipedia.org/wiki/Elle_(Einheit) (02.06.2007)

> so regelmäßig haben kann, und weil auch ihre Durchsichtigkeit die Stellen zu sehen verstattet, welche man etwa unterwärts noch zu berühren für gut findet."
> ([9], *Neue Beyträge*, S. 39)

Die Durchsichtigkeit ist natürlich immer noch ein gutes Argument, die Qualität der Metallplatten allerdings ist heutzutage erheblich besser. Ich werde im Folgekapitel darauf zurückkommen, auf welche anderweitigen Probleme man stößt.
Für die sichere Handhabung und Anregung ist es unabdingbar, dass die Grate der Platten gebrochen werden, oder besser noch, einen Feinschliff erhalten. Damit ist sichergestellt, dass man sich an den scharfen Kanten nicht verletzen kann und den Bogen nicht beschädigt.

Zur Erzeugung der Klangfiguren:

Übergeben wir dazu kurz Chladni das Wort:

> „Zu deutlicher Darstellung solcher Klänge wird erfordert, daß man den klingenden Körper an einer oder mehreren Stellen […] mit den Fingern oder auf andere Art halte, den Rand desselben an einer schicklichen Stelle unter einem rechten Winkel mit dem Violinbogen streiche, und […] auf die horizontal gehaltene Oberfläche desselben Sand streue […]" ([9], *Entdeckungen*, S. 18)

Chladni (wie auch Voigt) benutzten zur Anregung demnach einen Violinenbogen, an anderer (moderner) Stelle wird ein Cello- oder Bassbogen bevorzugt (s. z.B. [O]). Dies liegt sicherlich an der größeren Festigkeit und Länge der Bespannung, die ein längeres kontinuierliches Streichen unter hohem Anpressdruck möglich macht.
Die Fixierung der Platten gliedert sich grob in drei Typen: Einerseits das freie Halten zwischen zwei Fingern, wie im obigen Zitat erwähnt. Die „anderen Arten" bezeichnen das Auflegen auf eine oder mehrere punktförmige Unterlagen oder das Einspannen in eine spezielle Vorrichtung. Der letzte Typ besitzt wiederum zwei Varianten: Die nicht-variable Einspannung (z.B. festverlötet, -geklebt, -schraubt; letzteres erfordert ein Loch in der Platte) und die variable Einspannung wie in einer Schraubzwinge o. Ä. - auch dazu später mehr.
Aus dem vorhergehenden Kapitel wissen wir, dass durch das punktuelle Abdämpfen der Platte aus allen möglichen nur diejenigen Schwingungsformen selektiert werden, die an diesen Punkten stets in Ruhe bleiben, also Knotenlinien durch sie verlaufen. Das Streichen mit dem Bogen wird die Zahl der möglichen Formen weiter reduzieren, da sich am Ansatzpunkt oder in unmittelbarer Nähe davon ein Schwin-

gungsbauch befinden muss. Das Halten mit den Fingern hat nun Vor- und Nachteile. Im Grunde genommen ist es nur geeignet für Platten, die klein genug sind, dass man den Mittelpunkt gerade noch erreichen kann - ich müsste mich danach auf Platten mit einem Radius von ca. 6,5 cm beschränken. Glücklicherweise ist es nicht unbedingt nötig, die Platte zwischen zwei Fingern einzuklemmen - größere Platten lassen sich durchaus abdämpfen, indem man sie auf drei oder mehr Fingerspitzen legt.
Zu dieser Methode gehört auch noch das „Anstemmen" der Platte gegen einen Festen Gegenstand. Dazu Voigt:

> „Es giebt noch eine bequeme Art bey sehr großen Scheiben, mehrere Punkte am Rande derselben zu dämpfen. […] einen vierkantigen, eine Linie ins gevierte starken Stift […], der am Rande eines Tisches festgeschraubt, oder auf eine andere Art daran befestiget ist. In eine Kante desselben ist eine Ritze gefeilt, die ohngefähr so breit, als die Dicke des Glases ist. An diesen Stift stemmt man die Scheibe an durch zwey, oder, wenns erforderlich ist, mehr Finger […]. Zur Noth kann man sich der Tischecke statt des Stifts bedienen; doch ist dieß lange nicht so gut."

Auf diese Art und Weise kann man große Platten untersuchen, muss dabei aber nicht komplett auf die Finger verzichten. Deren Verwendung liefert nämlich zusätzlich eine haptische Komponente für das Experimentieren. Diese ist insofern nützlich, dass man, sprichwörtliches Fingerspitzengefühl vorausgesetzt, feststellen kann, ob die aktuellen Dämpfungspunkte gut gewählt, also in Ruhe sind. Mit dieser Information kann man, noch bevor die Figur sich ausformt, die Position des Bogens oder der Finger entsprechend anpassen. Zusätzlich sorgt die flächige und elastische Abdämpfung durch die Fingerspitzen für eine gewisse Fehlertoleranz in Hinsicht auf die zu erzeugende Klangfigur.
Das Auflegen als zweite Methode eignet sich zum Hervorbringen komplexerer Figuren und bei großen Scheiben. Dazu Chladni:

> „An großen Scheiben, wo man die schicklichste Stelle des Haltens nicht erreichen kann, oder wo zu befürchten ist, dass die Scheibe, wo sie sehr dünn ist, durch ihr eigenes Gewicht zerbrechen möchte, wird es rathsam seyn, die Scheibe an einer oder ein paar schicklichen Stellen auf weichen Unterlagen ruhen zu lassen […]"
> ([9], Neue Beyträge, S. 40)

Allzu weich darf diese Unterlage auch nicht sein, denn man muss die Platte dort „mit einem Finger aufdrücken" (ebd.). Die Verwendung von Korkstücken, die Chladni an anderer Stelle empfiehlt, scheint ein guter Kompromiss zu sein.

Die dritte Methode in der Variante zwei findet auch Anwendung bei Chladni.
In der *Akustik* beschreibt er eine Apparatur, mit der sich die Platten einspannen lassen und die selbst wiederum auf einer ebenen Oberfläche wie z.B. einem Tisch befestigt werden kann. Ich gehe hier nicht näher darauf ein, da alles weitere im Kapitel „Versuche unter Verwendung einer Halteklammer“ erläutert wird. Nur noch etwas zu Chladnis Einstellung gegenüber der Apparatur:
„In meiner Akustik habe ich zwar eine Maschine angegeben, in welche man eine Scheibe einspannen kann, und Manche haben sich auch einer solchen Vorrichtung bedient, ich finde aber besser, mich selbst zu den größten Scheiben immer blos der Finger zu bedienen“ (ebd.). Einige Vermutungen zur Ursache dieser Ablehnung finden sich ebenfalls im entsprechenden Kapitel.
Zum verwendeten Aufstreumaterial gibt Voigt folgende Hinweise:

> „Man muß sich nicht zu feinen Sandes bedienen, sondern etwas grobkörniger ist besser, weil dieser leichter von den schwingenden Stellen heruntergeworfen wird, hingegen jener sich anhängt. Er muß so beschaffen seyn, daß er, wenn man die Glasscheibe inklinirt, leicht herabrollt, weil er dann auch sehr leicht von den schwingenden Stellen weggeworfen werden kann. Es ist gut, wenn ihm etwas feiner Staub beygemengt ist, welcher eigene Erscheinungen bey den Experimenten zeigt. Er sammelt sich nämlich an einer stelle des schwingenden Theils an.“

Chladnis Formulierungen lauten ähnlich. Beide geben an, dass es nützlich sein kann, beispielsweise Kolophoniumstaub dem Sand beizumengen, da sich dieser zusätzlich an den Schwingungsbäuchen ansammelt. Damit kann primär die Position des Bogens besser angepasst werden.
Zum Abschluss noch eine Liste mit Hinweisen der beiden Autoren, die anzeigen, worauf beim Experimentieren zu achten ist:

- Beim Halten mit den Fingern dürfen nur die Fingerspitzen die Platte berühren - je flächiger man den Punkt dämpft, um so höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Figur entsteht, die dort einen Kreuzungspunkt mehrerer Knotenlinien hat
- Der Bogen muss beim Streichen möglichst senkrecht gehalten werden und darf nicht verrutschen.
- Beginnt eine Klangfigur sich ausbilden, muss man gleichmäßig genau so weiter streichen, wie beim Einsetzen des Vorgangs.
- Sollte die Platte klingen, sich aber keine feste Figur ausbilden, hat man Dämpfungspunkte gewählt, die zu mehreren Figuren passen. Es gibt nun drei Möglichkeiten, eine bestimmte davon zu selektieren. Mann kann

1) die Position einer der Punkte leicht variieren.
2) mit einem (weitere) Finger nacheinander einige Stellen der Platte berühren.
3) die Strichstärke und -geschwindigkeit variieren. Hier gilt allgemein: Langsamer Strich mit hoher Stärke führt zu tieferen Tönen und umgekehrt.

- Es darf nur eine sehr geringe Menge Sand auf der Platte liegen, da dieser sehr stark dämpft
- Verteilt sich der Sand ungleichmäßig auf der Platte, ist sie entweder nicht exakt waagerecht oder hat eine Vertiefung/ist verbogen

Auswertung der Ergebnisse durch Chladni

Für die Analyse und Auswertung seiner Ergebnisse hat Chladni ganz spezielle Methoden entwickelt, die ich hier kurz vorstellen will. Vorher muss klar werden, welcher Art seine Ergebnisse sind und wie er zu ihnen gelangen konnte.
Vielleicht wird es helfen, wenn am Anfang mit einigen Missverständnissen aufgeräumt wird, auf die ich immer wieder gestoßen bin, wenn ich „Uneingeweihten" Abbildungen von Chladnis Klangfiguren zeigte, wie sie in seinen Büchern zu sehen sind (s. Abb. 6).

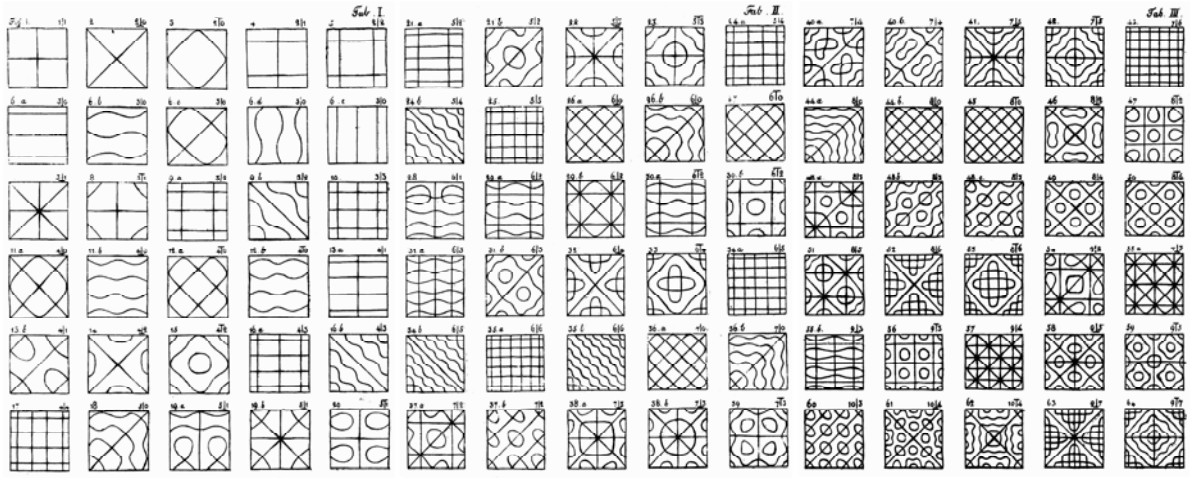


Abb. 6: Zusammenstellung der Abbildungen von Klangfiguren an quadratischen Platten aus Chladnis „Neuen Beyträgen"

Das erste Annahme ist, dass alle diese Figuren auf *einer* Platte erzeugt wurden bzw. erzeugt werden können. Die zweite lautet, dass Chladni die absoluten Eigenfrequenzen jeder Figur gemessen habe. Beides ist nicht der Fall.
Chladnis Vorversuche haben gezeigt, dass die Eigenfrequenz einer bestimmten Figur proportional ist zu der Frequenz derselben Figur auf einer anderen Platte mit verschiedener Dicke und Größe. Diese Proportionalität lautet allgemein wie folgt:

(27) $$f \propto \frac{d}{l^2}$$

Dabei stellt *d* die Dicke der Platte und *l* den Durchmesser dar. Bei quadratischen Platten meint *l* die Kantenlänge. Auf diese Weise konnte er seine Messungen an ganz unterschiedlichen Platten verallgemeinern. Er selbst schreibt außerdem an einigen Stellen, dass sich nie jede dieser Figuren auf einer einzigen Platte hervorbringen lässt.

Dem zweiten Missverständnis ist entgegenzuhalten, dass es zu Chladnis Zeit noch keine praktikable Möglichkeit gab, die absolute Frequenz eines Tons direkt zu messen. Aus diesem Grund wählte er willkürlich die Frequenz der einfachsten Klangfigur (z.B. „1|1“ - o. l. in Abb. 6) als Grundton C. Durch sein gutes Gehör war er nun in der Lage, durch Vergleich der Tonhöhe der Eigenfrequenzen von zwei direkt nacheinander erzeugten Klangfiguren das musikalische Intervall zwischen den beiden zu bestimmen. Damit kannte er die Tonhöhe des zweiten Tons und konnte wiederum diesen als Grundlage für weitere Progressionen benutzen. Er benutzte also die lange etablierte Methode der Bestimmung der Ton*verhältnisse* und stellte seine Ergebnisse zunächst in musikalischer Notation dar.

Bei der Bezeichnung und Katalogisierung der Klangfiguren ging er folgendermaßen vor: Bei kreisförmigen Platten zählte er die Anzahl der sich ausbildenden Kreise und Ringe und trug diese dann in eine entsprechende Tabelle ein (s. Abb. 7).

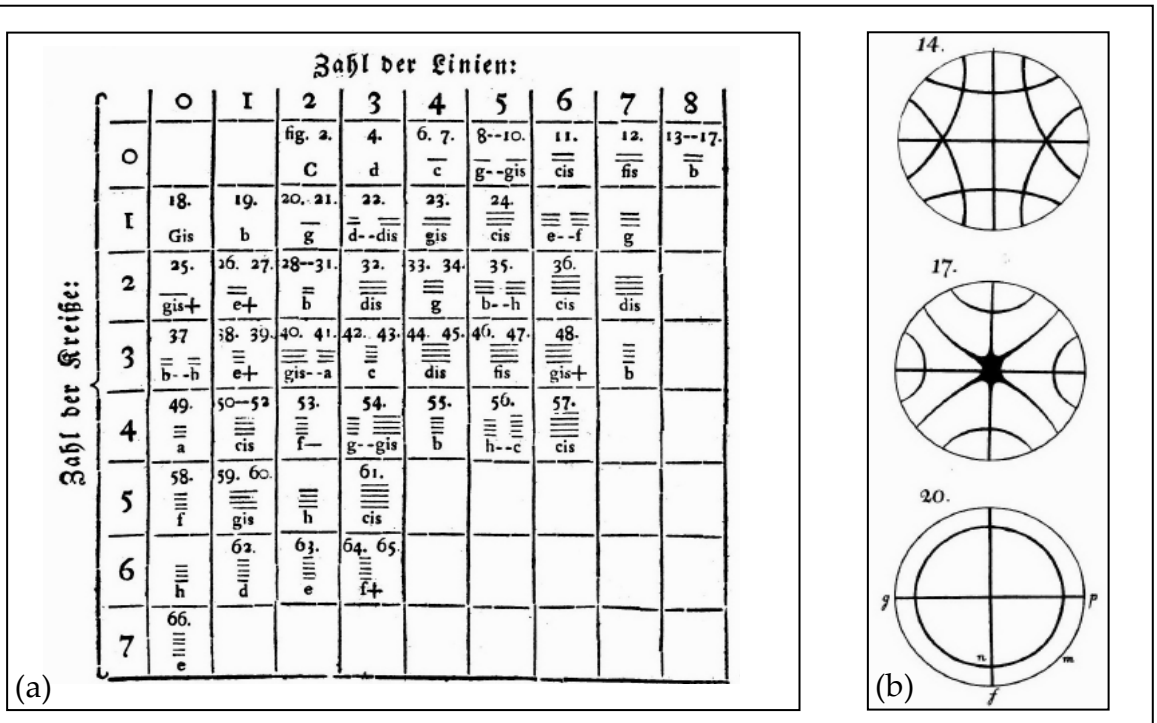


Abb. 7: a) Tabellarische Darstellung der Klangfiguren und der zugehörigen Tonhöhen
b) Darstellung einiger Klangfiguren an kreisformigen Scheiben

Die über den musikalischen Tonangaben stehende Zahl zeigt die Nummer der Klangfigur im Abbildungsteil des jeweiligen Werkes an.
Als er die Töne kannte, war es ein leichtes, diese durch Zahlenwerte darzustellen. Dazu wählte er eine beliebige Figur aus und gab ihr einen festen Wert, aus dem sich dann alle weiteren berechnen ließen (er wählte in diesem Fall willkürlich „2“ für Figur 18). Auf diese Art entdeckte er die Gesetzmäßigkeit, die durch Gl. (1) beschrieben wird.
Wie man schon in der Abb. 7 b) sehen kann, gibt es immer wieder Figuren, deren Einordnung in das gewählte Schema nicht einfach ist bzw. ihm zu widersprechen scheinen. Bei diesen Figuren handelt es sich aus heutiger Sicht um entartete Eigenfunktionen (zur besseren Vorstellung kann es hilfreich sein, sich Abb. 5 wieder ins Gedächtnis zu rufen). Das bedeutet also, sie besitzen die gleiche Frequenz, wie die „Idealform“ der Figur. Diese lässt sich manchmal aus strukturellen Gründen genau gleich schwer oder schwerer hervorrufen, als ihre entarteten Varianten. Dies bemerkt auch Chladni, wenn er zu Figur 13-18 schreibt:

> „[…] hingegen der Klang, bei dem sich acht feste Linien wie ein 16strahliger Stern zeigen, vorzüglich zu sehr regelmäßigen Abänderungen geneigt zu sein scheint […]“ ([9], Entdeckungen, S. 34)

Daraus lässt sich schließen, dass Chladni zuerst versucht, die Idealform zu erzeugen, um danach an der Tonhöhe festmachen zu können, welche Figuren als eine Variante derselben anzusehen sind. Ich denke mit einiger Übung im Interpretieren der Varianten und einem guten Gehör benötigt man diesen Umweg nicht mehr.

Während er die Klangfiguren der kreisförmigen Platten nur durchnummerierte, führte er für deren Bezeichnung bei quadratischen Platten eine eigene Nomenklatur ein:

> „Die verschiedenen Schwingungsarten einer Quadratscheibe, welche sich, wenn die Figur auch noch so verzerrt ist, allemal auf eine gewisse Zahl von Knotenlinien, die in die Länge oder in die Quere gehen, reducieren lassen, werde ich [so bezeichnen, d. A.], dass ich die Zahl der nach der einen Richtung gehenden Linien von der Zahl der Linien, die nach der anderen Richtung gehen, durch einen senkrecht dazwischen gesetzten Strich absondere.

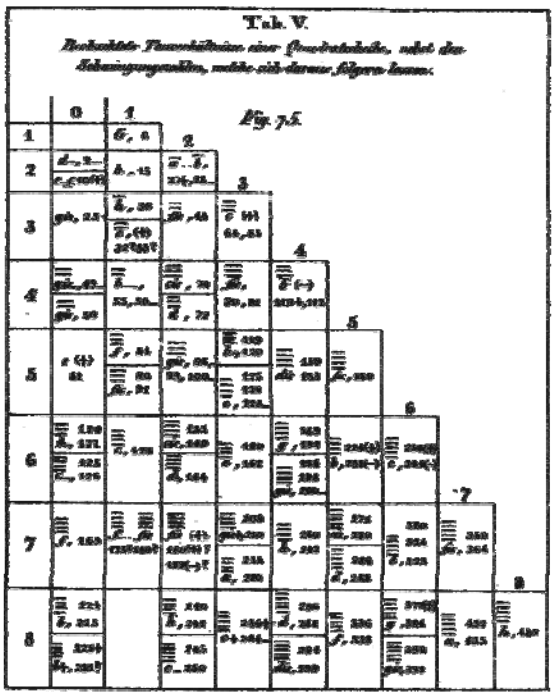
> So bedeutet hier 1|1 die Schwingungsart, wo eine Linie in die Länge, die andere in die Quere geht, (Fig. 1 [s. Abb. 6]); 3|0 die Schwingungsart, wo drei Linien nach der einen Richtung, aber keine nach der anderen vorhanden sind (Fig. 6, a-e [s. Abb. 6]), u.s.w.“ ([9], *Neue Beyträge*, S. 5)

Bei gleich klingenden Varianten ordnet er also der Nummer der Figur eine Buchstabenzählung nach. Er entdeckt jedoch auch andere Varianten, die seiner Auffassung nach gleich klingen sollten (s. S. 47), es aber reproduzierbar nicht tun. Für diese Fälle hat er

> „durch eine unterhalb oder oberhalb der Zahlen angebrachte Querlinie […] angezeigt, ob es die eine oder die andere dieser Schwingungsarten sein soll. Wenn nämlich der Strich unterwärts ist [z.B. Fig. 2 in Abb. 7] bedeutet es die Schwingungsart, welche den tieferen Ton, wenn er oberwärts ist [z.B. Fig. 3 in Abb. 7], die, welche bey derselben Zahl von Linien den höheren Ton giebt.“ ([9], *Neue Beyträge*, S. 5)

Durch eine Kombination dieser beiden Strategien kann er jede auftretende Figur, die zumindest Symmetrie aufweist, eindeutig bezeichnen. Für die Zählung der Figuren hat bei quadratischen Platten die erste Ziffer Vorrang, bei runden die Anzahl der Kreise. Die Eindeutigkeit ist wichtig für die Interpretation der Ergebnisse. Da Chladni hier ähnliche Gesetzmäßigkeiten im Zusammenhang mit Knotenlinienzahlen und Tonhöhe vermutet, wie er sie bei Kreisscheiben fand, benutzt er ein ähnliches Schema, wie das aus Abb. 7 a) für runde Scheiben.

Aufgrund der Symmetrie der Figuren und der Platten reicht es natürlich, nur beispielsweise die linke untere Hälfte der Tabelle darzustellen. So stellen sich Auszüge aus Chladnis Ordnungsschemata für die Klangfiguren an quadratischen Scheiben wie in Abb. 8 dar:



(a) (b)

Abb. 8: Ordnungs-/Analyseschemata für Klangfiguren an quadratischen Platten
(a) Darstellung durch Tonhöhen und Schwingungszahlen
(b) Darstellung durch Rückführung auf Vielfache u. a. Regelmäßigkeiten

Lassen wir Chladni diese beiden Tabellen erläutern:

> „In der fünften Tafel [Abb. 8 (a)] gebe ich die Schwingungszahlen einer Quadratscheibe an [...] nebst den so genau, als es mir möglich war, beobachteten Tonverhältnissen, welche ich aus den mannigfaltigen Tönen verschiedener Scheiben alle auf die schon angezeigt Tonhöhe reduciert habe. […] Die siebente Tafel enthält einen Versuch, die Zahlenverhältnisse der Töne [so] zu bestimmen, daß man sieht, was für Beziehungen ein jeder Ton auf seine Nachbarn hat, und wie bei den Fortschreitungen der Schwingungszahlen die Faktoren derselben sich zu verändern scheinen.“ ([9], *Neue Beyträge*, S. 13)

Wenn hierbei ein Tabellenfeld horizontal geteilt ist, entspricht das der o. g. Unterscheidung der verschieden klingenden Varianten der jeweiligen Klangfigur.

Mit „reducieren“ meint Chladni das Normieren der Tonhöhen von verschiedenen Scheiben mit Hilfe von Gl. (27).

Seine Suche nach Regelmäßigkeiten in Abb. 8 (b) führt ihn zu folgenden Ergebnissen:

Kat.	Verlauf der Schwingungszahlen	
n|0	N^2	
⋮	keine Regelmäßigkeit zu erkennen	
n|n-3	$2\cdot(N-2)^2$	
n|n-2	$\underline{n\|n-2}$	$(N-2)\cdot(2N-1)$
	$\overline{n\|n-2}$	$2N\cdot(N-2)$ o. $2\cdot(N-1)^2$
n|n-1	$2N^2-N$	
n|n	$2\cdot(N^2+N)$	

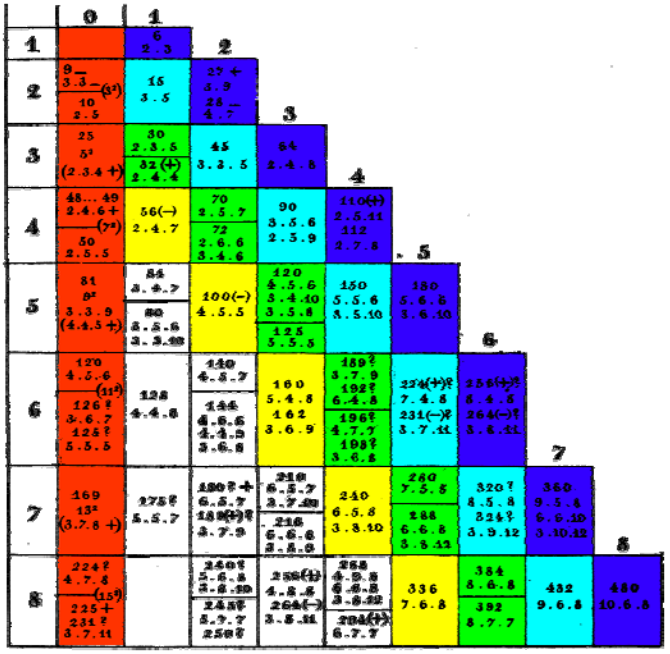


Abb. 9: Regelmäßigkeiten der Schwingungszahlen und die zugehörige Tabelle (die betreffenden Klangfigurkategorien sind zum besseren Verständnis passend eingefärbt)

Wenn man N als den ersten quadratischen Teiler der Schwingungszahl auffasst, „wird man also nirgends sehr von der Erfahrung abweichen, wenn man, mit Ausnahme einiger Töne in den ersten Reihen, den Tönen der vier letzten Stufen einer jeden Reihe folgende Werte in Beziehung auf N […] zuschreibt:“[87]

Ich bin hier etwas von Chladnis Darstellungsweise abgewichen, da er die Ergebnisse m. E. schwer verständlich darlegt.

Die Regelmäßigkeiten, die in Abb. 9 dargestellt werden, sind das Ergebnis der jahrelangen Versuche Chladnis an quadratischen Platten. Da ist es erstaunlich, dass er sie in seinen *Neuen Beyträgen* nur fast beiläufig erwähnt. Sicher war er enttäuscht darüber, dass sich kein so einfacher Zusammenhang zeigte, wie vorher bei den kreisförmigen Scheiben. Und doch zeigt er sich optimistisch, wenn er schreibt:

> „Es scheint indessen Manches gegenwärtig noch Unbekannte auf die Tonverhältnisse Einfluss zu haben, so dass, wenn man alles gehörig in Anschlag zu bringen wüsste, die Verhältnisse der Schwingungszahlen sich zwar weniger einfach, aber mit noch mehrerer

[87] [9], *Neue Beyträge*, S. 17

> Regelmäßigkeit und Stetigkeit zeigen würden. Nach dem, was ich hier mit genug Schwierigkeiten vorgearbeitet habe, wird es also Andern immer noch vorbehalten seyn, den in diesen Tafeln enthaltenen Angaben noch mehrere Genauigkeit zu geben.“ ([9], *Neue Beyträge*, S. 27f)

Chladni hat nach der Lektüre von Eulers Abhandlungen über schwingende Membranen und Stäbe sicher geahnt, dass eine Bewegungsgleichung für Platten diese Arbeit einmal unnötig machen würde, ganz zu schweigen von den ergänzenden numerischen Methoden, derer man sich heute bedienen kann. Es steht aber außer Zweifel, dass noch viele Nachfolger seine Ergebnisse benutzten, um ihre Theorien daran zu messen. Trotzdem darf man nicht den Fehler machen und die Rolle der Klangfiguren in Chladnis Forscherkarriere überbewerten, da sonst seine anderen Leistungen in den Hintergrund treten.

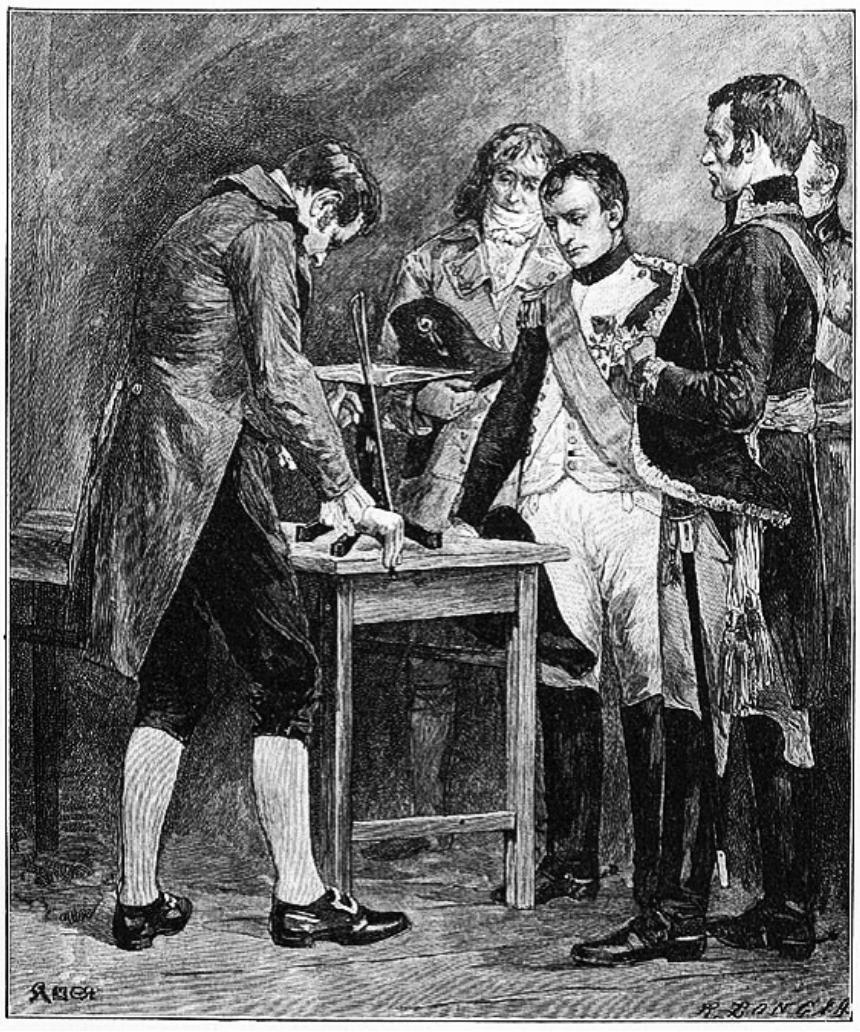


Abb. 10: Chladni führt Napoleon eine Klangfigur vor

Durchführung der Experimente

Zu Beginn der Experimente war ich etwas skeptisch, ob ich auch nur annähend so gute Ergebnisse - im Sinne von gut erkennbaren Klangfiguren - wie Chladni zu erzeugen im Stande wäre. Diese Misserfolgserwartung gründet darauf, dass ich bis dato diese Figuren nur durch elektrische Hilfsmittel erzeugt gesehen und dass ich nie ein Instrument, geschweige denn ein Saiteninstrument, gespielt habe. Zudem war beim Überfliegen der einschlägigen Literatur immer von den enormen Schwierigkeiten die Rede, die der jeweilige Experimentator dabei gehabt hätte. Meine Befürchtungen sollten sich aber ganz und gar nicht bewahrheiten, denn schon mit wenig Übung war ich im Stande viele Klangfiguren hervorzurufen. Der Wermutstropfen allerdings blieb das *gezielte* Erzeugen einer *bestimmten* Figur. Das, um Teile meines Fazits vorwegzunehmen, bleibt die Leistung Chladnis, der durch beständiges „Üben“ seine Fähigkeiten in diesem Bereich derart ausbauen konnte, so dass man ihm dort heutzutage nur mit ebensoviel Übung das Wasser wird reichen können.

Versuche mit fixierten Platten und Freihandversuche

Abb. 11: Ständer zur Fixierung und zum Anstemmen der Platten

In den ersten zwei Wochen beschäftigte ich mich ausschließlich mit zwei schon vorhandenen Metallplatten - eine quadratische aus Messing und eine runde aus Edelstahl. Beide wurden über ein mittig angebrachtes Loch auf einem Ständer fixiert, der ebenfalls schon vorhanden war, und den ich für diese Benutzung zweckentfremdet habe. Später habe ich mir eigens für diesen Zweck einen anfertigen lassen, da ich nicht sicher sein konnte, ob mir der ursprüngliche für die gesamte Versuchzeit zur Verfügung stehen würde. Die Vorlage für diese Konstruktion ist die Darstellung in Abb. 10, welche Chladnis Vorführung für Napoleon darstellt.

Bevor ich mit diesen Experimenten begann, habe ich versucht, möglichst viel über den verwendeten Sand in Erfahrung zu bringen, da ich das Gefühl hatte, diese spielt eine entscheidende Rolle für die Qualität der Figuren. Wie schon angedeutet, gibt es dazu nirgends explizite Hinweise, so beschloss ich, mir ein breites Spektrum an Aufstreumaterial zu beschaffen. Dessen relevante Eigenschaften sind Form, Gewicht, Größe und Elastizität.

Ich führte einige Versuche mit Salz, Zucker, Mehl, Reis und Kartoffelstärke durch, die jedoch alle erhebliche Nachteile mit sich brachten. Das waren hauptsächlich das Haftenbleiben an der Platte oder die zu grobe Körnung, die kaum Figuren entstehen ließen. Mehl und Kartoffelstärke neigten zusätzlich zur Klumpenbildung, sobald sich eine kleine Menge davon bei einer Knotenlinie anordnet.
Meine Vermutungen bezüglich des idealen Aufstreumaterials sahen nun wie folgt aus: Es darf nicht zu rund sein, da es sonst an den Knotenlinien nicht schnell genug zum Liegen kommt. Es darf nicht zu fein sein, da es sonst entweder klumpt oder sich ausschließlich an den Schwingungsbäuchen ansammelt. Werden die Körner aber sehr groß, dämpfen sie einerseits die Schwingung sehr stark und nehmen andererseits bei Abprallen sehr viel Impuls auf, wodurch sie zum „herumkullern“ neigen. Daraus lässt sich als Kriterium eine hohe Dichte folgern. Außerdem darf das Material nicht hygroskopisch sein, da sich ein Feuchtigkeitsfilm um die Körner durch Anhaften bemerkbar machen würde. All das ließ Sand nachträglich als einen guten Kompromiss erscheinen.
Da ich, wie erwähnt, keine Angabe über die Korngröße finden konnte, schrieb ich einige Vertriebsstellen für Quarzsand an, ob sie mir Proben in möglichst vielen verschiedenen Korngrößen zusenden würden. Die meisten dieser Firmen bieten auch Strahlmittel[88] an, also beschloss ich, meine Anfrage auch darauf auszuweiten. Diese Strahlmittel sind je nach Einsatzgebiet sehr unterschiedlich in Material und Form, d. h. mit einer Auswahl davon könnte ich meine o. g. Hypothesen über ein ideales Aufstreumittel überprüfen. Leider werden Strahlmittel ausschließlich in 25 o. 50 kg Säcken verkauft und nur eine Firma hatte kleinere Proben vorrätig, so dass ich hier nicht allzu wählerisch sein konnte.

[88] Kornmaterial zum Sandstrahlen - nicht zwangsweise Sand.

Mir standen folgende Materialien in den angegebenen Korngrößen zur Verfügung:

Material	Korngrößen		Bemerkungen
Quarzsand $_A$	150 bis 200 µm	200 bis 300 µm	-
Keramik $_B$	240 bis 325 µm		Perlen
Polyamid $_C$	750 x 750 µm		zylinderförmige Körner
Glas $_D$	300 bis 600 µm	400 bis 1400 µm	Schrot

Tab. 1:Material und Korngrößen der Aufstreumittel (die Indizes verweisen auf Abb. 12)

Beim Durchtesten dieser Aufstreumittel eignete sich die feinste Körnung des Quarzsandes (A) am Besten, da sie die schönsten Figuren liefert. Das PVC-Schrot (C) sprang viel zu stark auf der Platte herum und ordnete sich fast gar nicht an den Knotenlinien an.

Das Gleiche geschah beim Glas (D). Die Keramikperlen (B) stellten sich auf der polierten Messingplatte als besonders ungeeignet heraus, da sie so glatt und rund sind, dass der kleinste Lufthauch oder eine Schiefstellung der Platte ausreichten, um sie herunterrollen zu lassen. Das sah bei der Stahlplatte mit ihrer strukturierten Oberfläche anfangs etwas besser aus. Doch sobald man sie mit dem Bogen streicht und die Perlen in Bewegung geraten, rollen und springen sie solange, bis sie auch hier von der Platte fallen. Ein kurzer Versuch bestätigte meine Annahme, dass sie sich für Glasplatten noch weniger eignen, daher habe ich die Perlen in weiteren Versuchen nicht wieder benutzt.

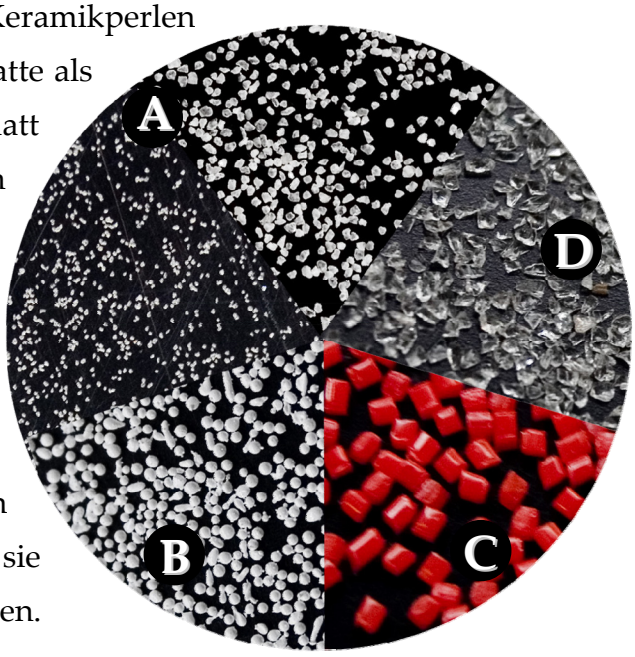


Abb. 12: Form- und Größenvergleich der Aufstreumittel

In Abb. 13 sind die ersten Klangfiguren zu sehen, die ich mit dem feinen Sand auf der jeweiligen Platte reproduzierbar erzeugen konnte. Hier wie auch im Folgenden sind die Dämpfungspunkte mit roten, der Anregungspunkt mit einem grünen Pfeil markiert.

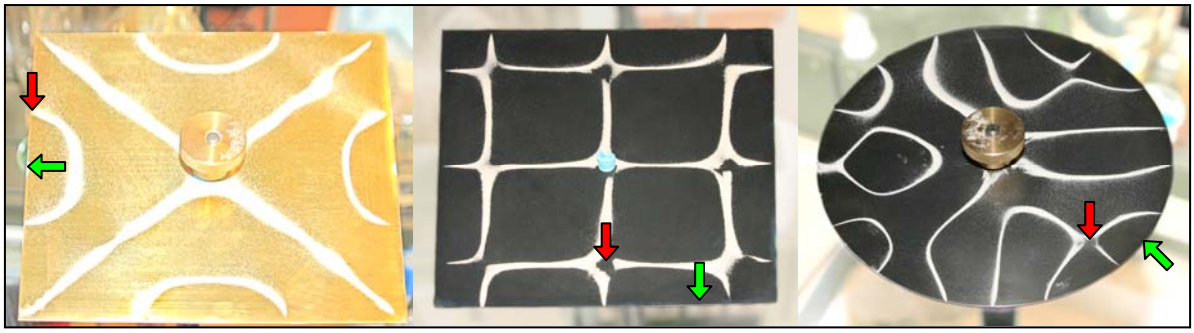


Abb. 13: Erste Versuche an eingespannten Metallplatten
links und mitte: Messingplatte vor und nach dem Brünieren; rechts: Stahlplatte

Die Bilder sind alle am selben Tag aufgenommen und ich habe mir ungefähr dieselbe Zeit zum Üben genommen. Während die Figuren an der Messingplatte so auch von Chladni erzeugt wurden, ist es mir erst um Einiges später gelungen, solche auch auf der runden Platte zu hervorzubringen.

Hier lag das Problem bei der Messingschraube der Fixierung, die ich in den ersten Tagen viel zu fest angezogen hatte. Ich vermute, dass sich dadurch Spannungen in der Platte aufgebaut haben, die eine gleichmäßige Ausbreitung der Schwingungen verhinderten. Man sieht auch am Bild, dass die rechte Figur etwas asymmetrisch erscheint, was ohne äußere Einflüsse nicht passieren sollte. Bei dieser Art der Fixierung erhält man die besten Resultate, wenn die Platte nicht ganz fest eingespannt wird, sondern ein wenig beweglich bleibt. Andernfalls tut man zuviel des Guten, denn eine durch den Fixierungspunkt verlaufende Knotenlinie muss man sie sich lt. Chladni „ungefähr wie den Ruhepunkt eines Hebels, oder Wagebalkens vorstellen“[89].

Das Brünieren der Messingplatte ließ ich vornehmen, da ich wegen der recht hellen und glänzenden Oberfläche nur schlecht erkennen konnte, wann sich eine Figur auszubilden beginnt. Es hatte den positiven Nebeneffekt, dass die Oberfläche nach dem Sandstrahlen und der Behandlung mit Brünierlösung den Sand wesentlich schneller zur Ruhe kommen ließ und die Knotenlinien dadurch schneller und schärfer abgegrenzt erschienen.

[89] [9], *Neue Beyträge*, S. 7

Gleich am ersten Tag dieser Versuche ist mir Einiges aufgefallen, was sicher auch für Chladni Thema war:

- Das Abdämpfen der Platten durch die bloßen Finger führt zu fettigen Abdrücken, auf denen sich der Sand festsetzt. Daher bin ich dazu übergegangen, die großen Platten, die sich nur schwer reinigen lassen, nur noch mit Baumwollhandschuhen anzufassen und die kleinen regelmäßig mit Ethanol zu säubern. Die anhaftenden Reste von Kolophoniumstaub behindern zusätzlich die Bewegung des Sandes.
- Das eben angesprochene Festsetzen des Sandes ist außerdem abhängig von der aktuellen Luftfeuchtigkeit. Bei Werten jenseits von 70% muss man gröberen Sand verwenden, da der feine flächig an der Platte haftet.
- Das Polieren der Plattenkanten auf Spiegelglanz bringt eher Nachteile, da sich das Kolophonium dann nicht festsetzen kann und der Bogen nicht greift. Außerdem erzeugt man dabei atemwegs- und schleimhautreizenden Messingstaub, so dass Schleifarbeiten nur mit Wasser, unter dem Abzug oder mit Atemschutz durchgeführt werden sollten.
- Das Aufstreuen des Sandes direkt aus einem Behälter oder mit Hilfe eines Siebes führt meiner Erfahrung nach zu einer sehr ungleichmäßigen Verteilung auf der Platte. Außerdem tendiert man auf diese Weise dazu, mehr Sand als nötig aufzubringen. Eine recht einfache Methode ist, den Sand aus einer flachen Schale / einem Uhrglas o. Ä. vorsichtig auf die Platte zu pusten. Mit ein wenig Übung erhält man sehr gute gleichmäßige Resultate mit wenig Sand. Das „Bestäuben“ dauert auf diese Weise nur wenige Sekunden. Der Sand verteilt sich dabei zwar relativ weiträumig, dafür hat man den Vorteil, dass die Linien der Klangfiguren sehr schmal und regelmäßig werden. Um den Sand nach Benutzung wieder aufzunehmen, eignet sich ein ca. 5 cm breiter Pinsel mit weichen Borsten.
- Die Lautstärke, die mit manchen Figuren einhergeht, überschreitet oft den für Arbeitsplätze maximal empfohlenen[90] Schalldruckpegel von 85 dB(A) und manchmal sogar die Grenze von 90 dB(A), ab der Gehörschutz Pflicht wird. Zum Glück besitze ich Lärmschutzohrstöpsel mit einem sehr guten, d. h. linearen Frequenzgang. Dadurch bleiben die relativen Lautstärkeunterschiede der verschiedenen Töne gleich und die Ohrstöpsel verfälschen nicht den Klangeindruck beim Erzeugen der Figuren.

[90] nach den Richtlinien des VDI (Verband Deutscher Ingenieure)

· Die Finger- und Handhaltung am Bogen sind sehr wichtig und erfordern einiges an Übung. Damit meine ich nicht das, was Chladni anspricht (das Streichen senkrecht zur Plattenkante ohne mit dem Bogen zu „wandern“), sondern speziell die Art und Weise, wie der Bogen angefasst und gehalten werden muss, damit man genügend Druck ausüben kann ohne dabei das Fingerspitzengefühl beim Streichen zu verlieren. Folgende Abbildung zeigt einige falsche, und die nach weitläufiger Meinung beste Haltung. Nur so wie in Abb. 14 dargestellt behält man die Beweglichkeit im Handgelenk bei, die man braucht, um den Bogen in der vollen Länge kontrolliert durchzuspielen.

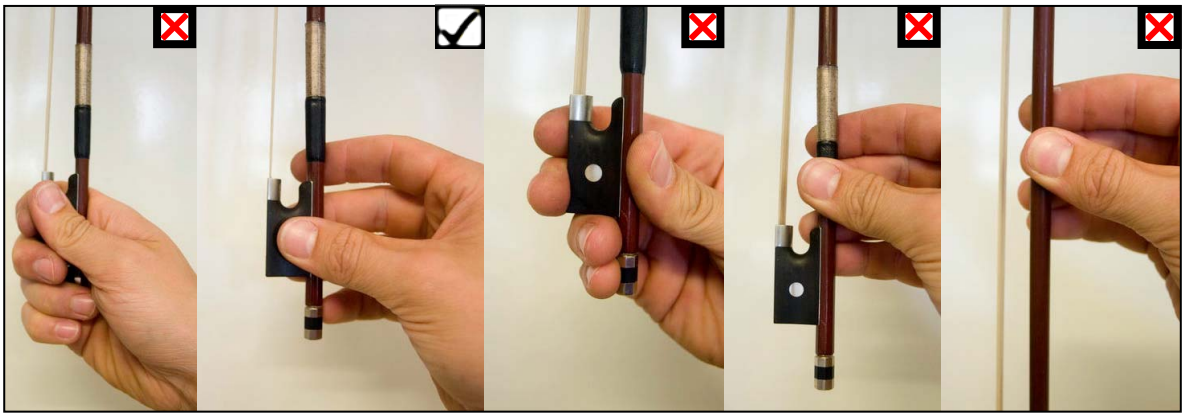


Abb. 14: Einige fehlerhafte und die empfohlene Bogenhaltung

Bevor ich die oben vorgestellten Metallplatten für freihändige Experimente benutzen konnte, musste ich mich erst vergewissern, dass kleine Löcher in der Platte wenig Einfluss auf die Form der Figuren und die Lage der zugehörigen Eigenfrequenzen haben. Während Ersteres wohl der Fall ist - ich habe dazu möglichst viele verschiedene Figuren auf beiden Platten erzeugt und sie mit Chladnis Abbildungen verglichen - stimmt Letzteres so nicht. Tatsächlich hat ein mittig liegendes Loch nach [33] den stärksten Einfluss gegenüber allen anderen Positionen und schon ein Lochdurchmesser von nur einem Prozent der Kantenlänge verschiebt die Eigenfrequenzen um ein Vielfaches davon. Leider habe ich von diesem Fakt erst sehr spät gelesen, so dass ich nicht mehr dazu kam, diese Aussage experimentell zu überprüfen. Aus diesem Grund habe ich die durchbohrten Metallplatten nicht in den Versuchsteil einbezogen, der sich mit dem Nachvollzug der von Chladni entdeckten Proportionalität nach Gl.(27) beschäftigt.

Die Kategorie „freies Halten“ schließt für mich die Variante des Anstemmens mit ein, denn beide habe die Eigenheit der variablen Dämpfungsposition. Zudem können Punkte innerhalb der Platte nur durch Abdämpfen mit den Fingern „ruhig gestellt“ werden. Ich habe das Anstemmen immer als eine Art Kompensation dafür gesehen, dass die Spannweite der Finger einer Hand zu beschränkt ist für größere Platten. Dazu kommt noch, dass man ab einer bestimmten Plattengröße nicht mehr in der Lage ist, das Drehmoment zu kompensieren, welches durch das Eigengewicht der Platte und das Streichen mit dem Bogen entsteht. Wenn man das trotzdem über längere Zeit versucht, stellen sich - zumindest bei mir - heftige Schmerzen im Bereich des Handgelenks ein, die auf eine Überlastung der Sehnen hindeuten und bei Nichtbeachtung in eine Sehnenscheidenentzündung münden können.
Chladni spricht zwar davon, dass eine „vorteilhafte Bildung der Finger und viele Muskelkraft“[91] nötig seien, erwähnt jedoch von dem o. g. Effekt nichts. Darstellungen der Handhaltung finden sich auch in dem angesprochenen Werk von Voigt.

In Abb. 15 habe ich die Grundtypen der Handhaltungen beim freien und angestemmten Halten dargestellt. Jede Hand- und Fingerposition lässt sich darauf zurückführen.

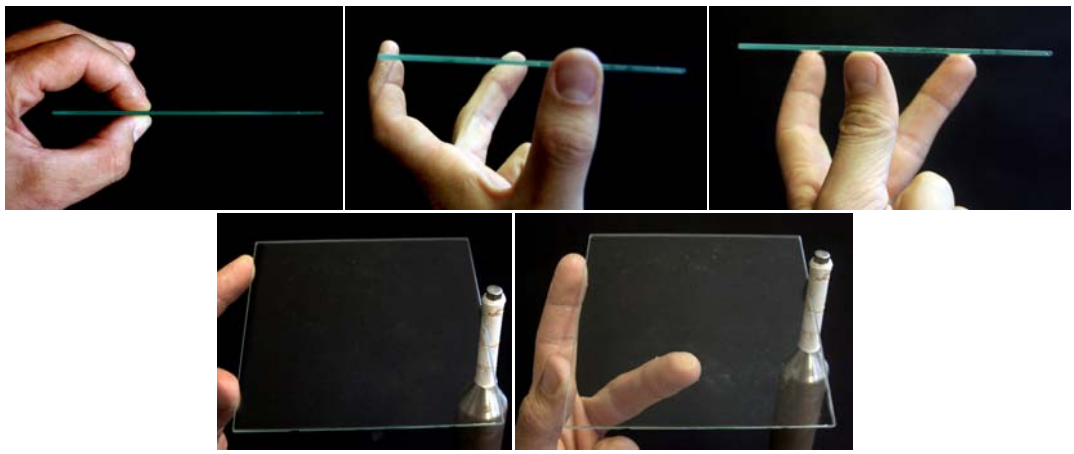


Abb. 15: Grundtypen der Handhaltungen

Ich werde im Folgenden nur einige der Figuren anführen, die ich auf Glasplatten erzeugen konnte, denn im Laufe der Zeit haben sich sehr viele verschiedene Figuren gezeigt (>30), so dass eine vollständige Aufzählung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, ohne noch zu einem Erkenntnisgewinn beizutragen.

[91] [9], *Neue Beyträge*, S. 42

Bei der Auswahl der Figuren innerhalb der jeweiligen Haltekategorie richte ich mich nach meiner Fähigkeit, diese aus dem Gedächtnis reproduzieren zu können. Wenn sich eine bestimmte Figur auf mehreren Platten gezeigt hat, wähle ich bevorzugt diejenige aus, die dem Aussehen nach den Abbildungen in Chladnis Werken am nächsten kommt.

Die einfachste Klangfigur auf quadratischen Platten ist die mit der Bezeichnung 1|1. Ihr ordnet Chladni den Grundton zu. Auf runden Platten ist es ganz analog die Figur ohne Kreis und mit 2 Linien.

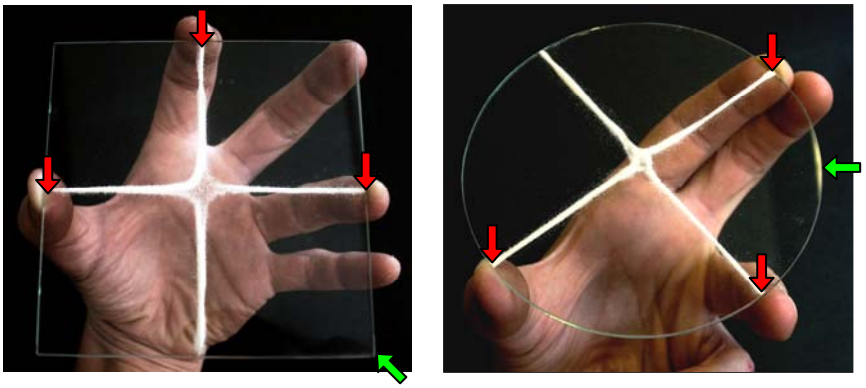


Abb. 16: Grundfiguren. links: 1|1 rechts: L=2

Mit freiem Halten ließen sich diese beiden Figuren nur auf den jeweils kleinsten Platten erzeugen. Um nicht immer alle Maße angeben zu müssen, ist hier eine Übersicht der Glasplatten, die ich für die folgenden Versuche verwendet habe:

quadratische Platten					kreisförmige Platten			
	Kantenlänge in mm[1)]				Durchmesser in mm[1)]			
	120	229	380	457	120	206	431	488
Dicke in mm[2)]	$1{,}9_{Q1}$	$1{,}9_{Q2a}$	$1{,}9_{Q3}$	$1{,}9_{Q4}$	$1{,}9_{K1}$	$1{,}9_{K2a}$	$1{,}9_{K3}$	$1{,}9_{K4}$
		$2{,}9_{Q2b}$				$2{,}9_{K2b}$		
		$3{,}9_{Q2c}$						

[1)] Fehler ±2 mm [2)] Fehler ±0,1 mm

Tab. 2: Aufzählung der bei den Versuchen verwendetet Platten (die Indizes dienen zur Identifizierung der Platten im Text)

Beim Glas handelt es sich um handelsübliches Float- d. i. Fensterglas. Die Maße von Q1 und K1 sind so gewählt, dass ich grade noch in der Lage bin, sie mit den Fingern zu umfassen.

Für die Grundfigur, so habe ich festgestellt, ist dieses Umfassen die beste Art, um nicht durch einen geringfügig falschen Anregungspunkt oder Streichgeschwindigkeit andere, „unerwünschte“ Figuren hervorzurufen. Einfaches Halten in der Mitte kann nämlich noch zu folgenden Figuren führen:

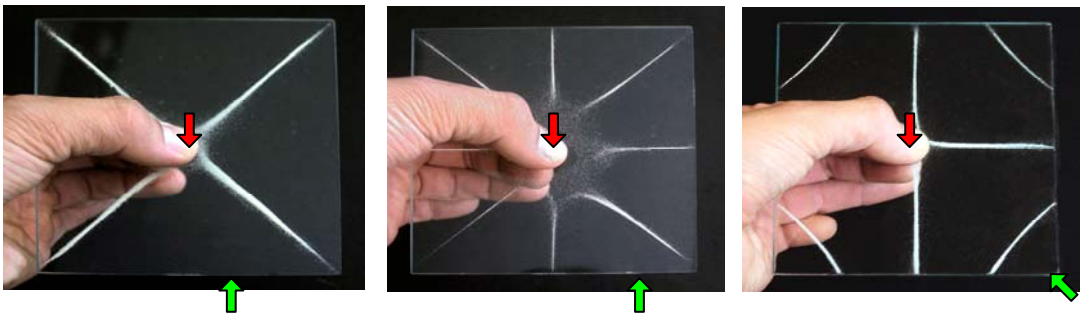


Abb. 17: Figuren bei mittigem Halten.
v.l.n.r.: $\underline{2 \mid 0}$, $\underline{3 \mid 1}$, $\overline{3 \mid 1}$

Wenn wie in diesem Fall die Anregungspunkte für verschiedene Figuren aufgrund der geringen Kantenlänge so nahe beieinander liegen, führt die Breite der Bogenbespannung zu einem unsauberen Erscheinungsbild der gesuchten Figur, da die Kante über einen ganzen Bereich hinweg angeregt wird. Außerdem ergeben sich dadurch erhebliche Schwierigkeiten bei deren Auffinden.

Ersteres bedeutet, dass sich der Sand nur flächig an den Knotenlinien anordnet und die Linien im Vergleich zu Chladnis Abbildungen sehr „verbogen“ daherkommen. Beides ist ein Indiz für die Beimischung weiterer, ungewollter Eigenfrequenzen. Letzteres äußert sich darin, dass man sich sehr viel Mühe bei den o. g. Methoden des Selektierens der richtigen Figur geben muss, manchmal auch ohne Erfolg.

Vielleicht war dies der Grund für die erheblichen Probleme, die ich mit dem Erzeugen von Figuren auf runden Platten hatte. Jedenfalls ist mir mit K1 kaum gelungen, mehr als nur einige wenige über die Grundfigur hinausgehende zu erzeugen, die ich auf Anhieb wiederholen könnte (wie sich noch zeigen wird, setzten sich diese Schwierigkeiten auch bei großen Platten fort).

Chladni spricht allerdings nirgendwo davon, dass er mit runden Platten mehr Schwierigkeiten hatte, als mit quadratischen. Nur eine kurze Andeutung lässt vermuten, dass auch er dabei mit der Tücke des Objekts zu kämpfen hatte:

„[Es] ist öfters viel Geduld, und eine anhaltende Uebung in dieser Art von Versuchen nöthig: man wird mich also keine falschen Behauptungen beschuldigen, wenn die verlangte Art des Klanges nicht sogleich erscheinen will: bey fortgesetzten Experimentiren erreicht man seinen Endzweck endlich doch, und oft wird mancher sonst schwer zu erhaltende Klang sich unvermuthet zeigen, wenn man einen andern sucht.“ ([9], Entdeckungen, S. 19)

So, wie er es beschreibt, ist es mir bei runden Platten sehr oft ergangen. Die Anweisungen, die er in den *Entdeckungen* zu einigen einfachen Figuren gibt, waren für mich daher sehr hilfreich und führten u. a. zu folgenden Ergebnissen:

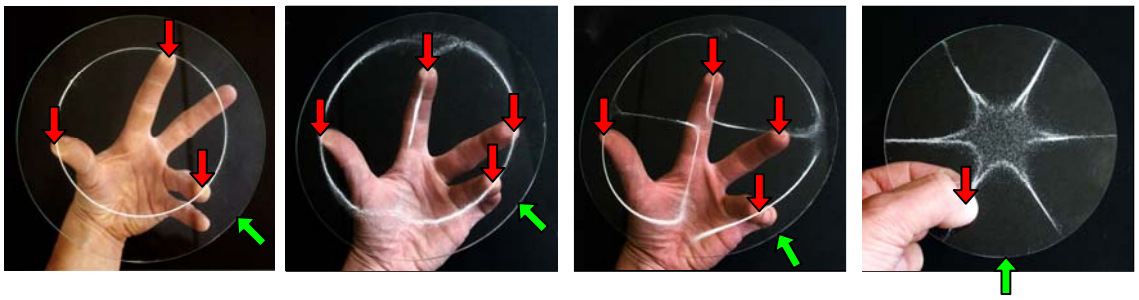


Abb. 18: Freihandfiguren an runden Platten

Bei der großen Platte handelt es sich um K2b, da deren höheres Gewicht sie besser auf den Fingerspitzen liegen lässt, als K2a. Eine andere freihändige Haltevariante ist hier ob der hohen Hebelkräfte nicht möglich.

Noch eine Anmerkung zum Anstemmen: Ich habe zuerst Voigts oben zitierten Vorschlag befolgt und mir einen Stift von ca. 1,1 mm Dicke angefertigt, den ich in den Ständer (s. Abb. 11) einschrauben konnte. Die Ergebnisse waren jedoch enttäuschend: Die daran angestemmten Platten rutschten immer wieder hin und her. Die empfohlene Ritze in Plattenstärke führte dazu, dass diese bei zu wenig Anpressdruck darin vibrierten und Glassplitter abgeschlagen wurden. Bei zuviel Druck hingegen verbog sich der Stift. Letzteres hatte ich schon vorher aufgrund der geringen Dicke vermutet. Ich habe allerdings auch keinen Schmiedestahl verwendet, wie bei Chladni und Voigt üblich. Dessen hohe Elastizität und Zähigkeit hätte zumindest das Verbiegen verhindert. Meines Erachtens ist der Metallstift eine unnötige Verkomplizierung des Sachverhalts, da man den Umgang damit zusätzlich erlernen muss.

Abb.19: Stoffüberzogener Stift zum Anstemmen

Daher habe ich die Konstruktion variiert und einen 8 mm dicken, runden Stahlstift benutzt und ihn mit Stoff überzogen (s. Abb.19). Diese Variante verhindert erfolgreich das Verrutschen (man kann den Stoff auch zusätzlich mit Kolophonium einreiben) und die Beschädigung der Platten. Ob sie schlechtere Ergebnisse bei den Figuren hervorruft, kann ich nicht beurteilen, da ich aus den genannten Gründen abbrechen musste, bevor sich eine erkennbar ausbilden konnte.

Im der folgenden Abbildung (Abb. 20) sind in der ersten Reihe die Figuren auf Q1 dargestellt, die nicht mit mittigem Halten erzeugt wurden, in der unteren Reihe diejenigen, die ich nur durch Anstemmen erzeugen konnte.

In der oberen Reihe von links nach rechts in Chladnis Notation:

$\overline{2\,|\,0}$, $2|1$, $3|0$ und eine andere Variante von $3|0$.

In der unteren Reihe:

$2|2$, $3|2$, $\overline{4\,|\,0}$, $\underline{4\,|\,2}$

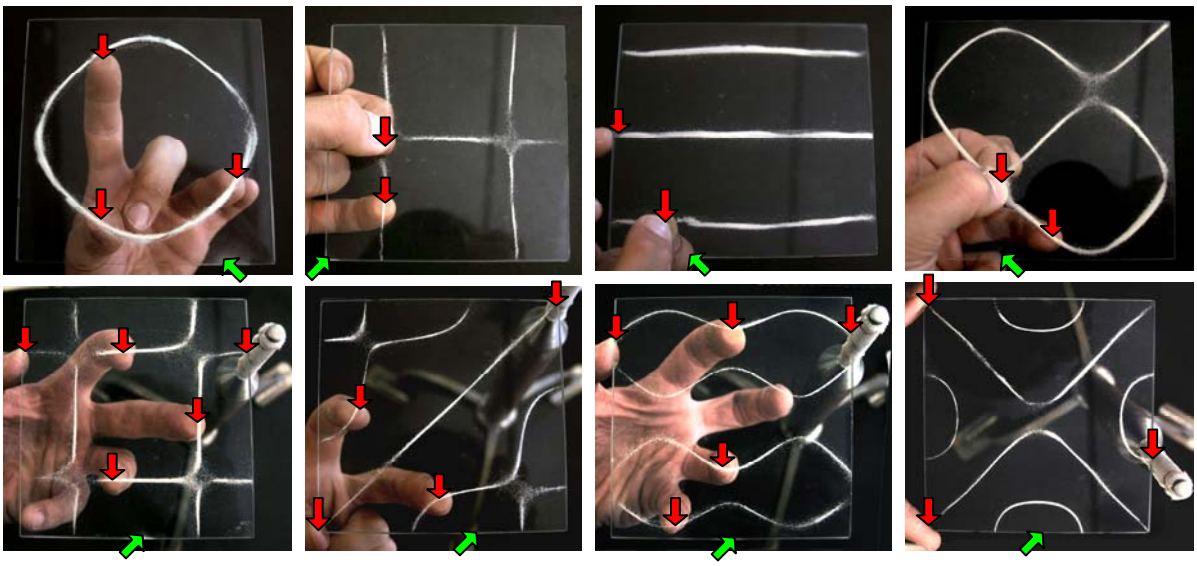


Abb. 20: Weitere Klangfiguren auf Q1

Gerade was die komplizierteren Figuren der unteren Reihe angeht, war ich erstaunt, wie viele Punkte ich abdämpfen musste, damit die Figur sauber und beim ersten Strich erscheint. Hier ließ ein strenges Vorgehen nach Chladnis Anweisungen immer wieder andere entstehen, da er weniger Punkte vorschlägt und offensichtlich darauf baut, mit der Art des Streichens die richtige zu selektieren.

Auf den Platten Q2• lassen sich durch Anstemmen noch einige andere Figuren erzeugen - für freies Halten sind sie in den meisten Fällen zu groß und schwer und auch so ist der Kraftaufwand enorm.

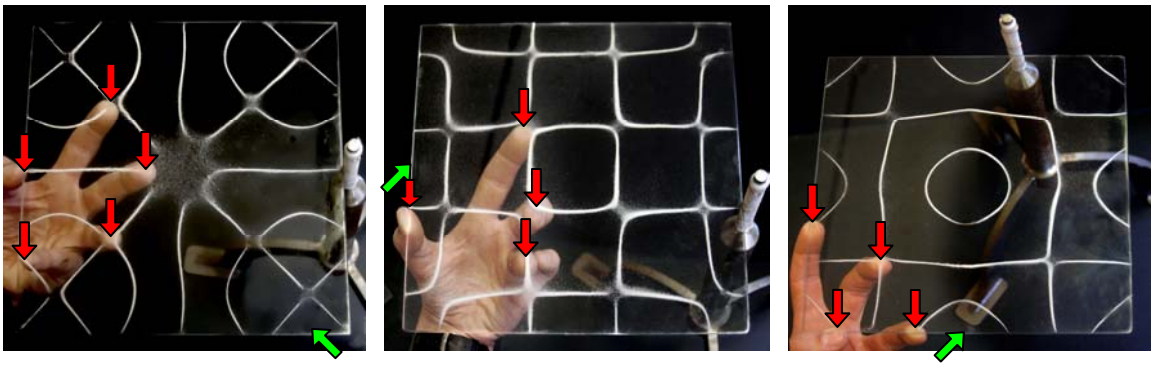


Abb. 21: Figuren auf Q2• durch Anstemmen
l.: von Chladni nicht aufgenommen, wahrscheinlich $\overline{2 \mid 0} + \underline{5 \mid 1} \Rightarrow 7 \mid 1$
m.: leichte Variation von $4 \mid 4$
r: $\overline{6 \mid 2}$

Während bei den quadratischen Platten das Anstemmen zu neuen Figuren führte, die ich freihändig nicht bekam, war es bei runden eher hinderlich. Es entstanden fast nur die sternförmigen Figuren - Kreise traten dabei, egal bei welcher Fingerstellung, nur in den seltensten Fällen auf. Aufgrund dieser Tatsache habe ich versucht, auf den K2• möglichst viele dieser Figuren zu erzeugen. Natürlich auch, um für die abschließende Analyse von Chladnis Ergebnissen möglichst viele Daten zu sammeln.
In Teil a) der folgenden Abbildung sind alle durch Anstemmen erzeugten sternförmigen Figuren auf diesen Platten zusammengefasst. Teil b) zeigt diejenigen davon, die auch mit einem Kreis erschienen. Die letzte Figur (u. r.) ließ sich relativ leicht erzeugen, wird aber bei Chladni nirgendwo aufgeführt. Sie würde den Figuren angehören, die sich nicht mit dem Linie-Kreis-Schema erklären lassen (damit ist die Tonhöhe nicht nachvollziehbar mit Gl. (1)).
Für die Platten K2• liefert das Anstemmen noch die vielfältigsten Ergebnisse. Die Sache wird aber sehr wackelig, wenn für die Figur ein hoher Druck mit dem Bogen nötig ist. Ich kann jetzt schon vorwegnehmen, dass die Halteklammer auch aus diesem Grund für das Erzeugen der sternförmigen Figuren wesentlich besser geeignet ist - allerdings lassen sich damit keine Figuren mit Kreis hervorbringen.

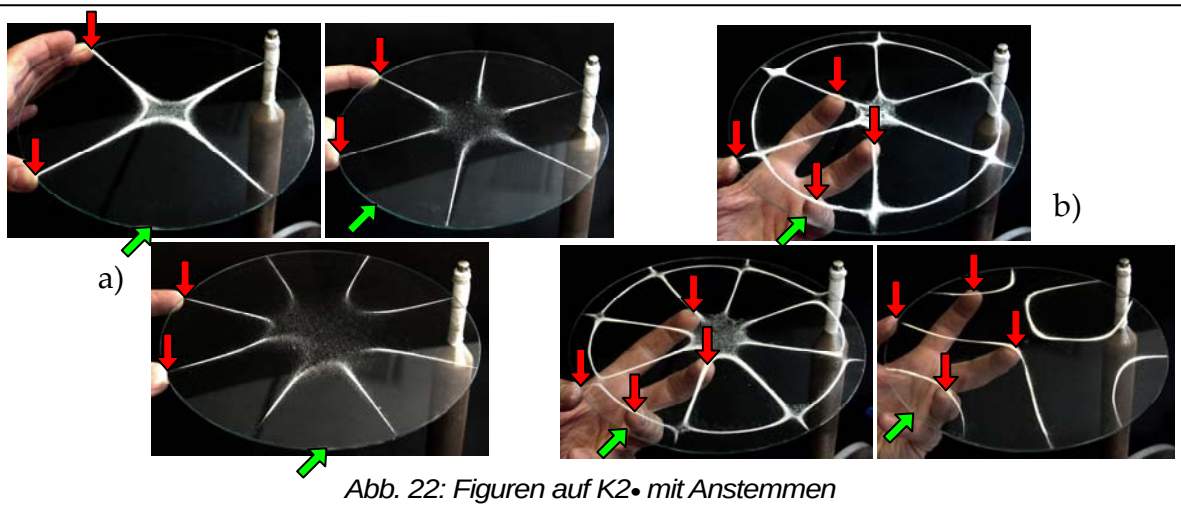


Abb. 22: Figuren auf K2• mit Anstemmen
a) sternförmige ohne Kreis b) sternförmige mit Kreis; u. r.: nicht zuzuordnen

Will man die Plattengröße noch weiter erhöhen, tauchen allerhand Probleme auf, von denen sich einige nur lösen lassen, indem man die Platten, wie von Chladni vorgeschlagen, an verschiedenen Punkten auflegt. Im folgenden Kapitel gebe ich einen Überblick über die (meist komplexeren) Figuren, die ich durch solches Auflegen erzeugen konnte.

Versuche an aufgelegten Platten

Zu den Problemen, die diese Methode notwendig machen, gehört, dass man ab einer bestimmten Größe nicht mehr gleichzeitig Punkte am Rand und in der Mitte der Platte dämpfen kann. Weiterhin gelingt es kaum noch, das durch das Streichen und das Eigengewicht der Platte erzeugte Drehmoment zu kompensieren. Dadurch fangen die Platten an zu wackeln oder stellen sich schief.
Als Material zum Auflegen habe ich Korkstücke benutzt, wie die sich nach oben hin verjüngen, damit die Auflagefläche nicht zu groß wird. Andrücken kann man entweder direkt über einem solchen Stück, an einer beliebigen Stelle zwischen den Korkstücken. Auf diese Weise erzeugt man allerdings eine Spannung innerhalb der Platte, die die Figuren etwas verzerrt. Obendrein verbiegen sich die großen Platten und der Sand lagert sich vornehmlich in dieser Vertiefung ab - die Linien am Rand sind dann nur noch schwach zu erkennen.
Als ich auf den Platten Q3/Q4 und K3/K4 mit dieser Methode die komplexen Figuren aus Abb. 6 hervorrufen wollte, konnte ich feststellen, dass auch viele elementare immer noch sehr gut funktionierten. Nur die ersten drei der dort aufgeführten hatten eine zu niedrige Eigenfrequenz, die mit dem Bogen nicht mehr anregbar war.

Bei den höheren (ca. ab Fig. 20) bestätigte sich meine Annahme, dass es nur noch wenig hilft, sich allein die gewünschte Figur vorzustellen und entsprechende Dämpfungspunkte zu wählen, da so meist eine völlig unerwartete Figur erscheint. Stattdessen muss man wieder auf Chladnis Rat hören:

> In den Fällen, wo mehrere Schwingungsarten dieselben Stellen des Haltens und des Streichens miteinander gemein haben, muss man zugleich durch Berührung solcher Stellen, die bey der Schwingungsart, die man hervorbringen will, nicht aber bey der andern, in Ruhe bleiben, die andern wegdämpfen." ([9], *Neue Beyträge*, S.39)

In dem was Chladni dort schildert liegt meines Erachtens die größte Schwierigkeit: Man muss nicht nur die gewünschte Figur vor Augen haben, sondern zusätzlich noch viele andere. Nur so kann man denjenigen Punkt ausmachen, der speziell bei jener Figur in Ruhe bleibt.
Zunächst zwei der einfacheren Figuren auf Q4, die sich auf Q1 nicht zeigen wollten (links in Abb. 23) und eine Figur auf Q2, die nur durch Auflegen erzeugbar war (rechts in Abb. 23).

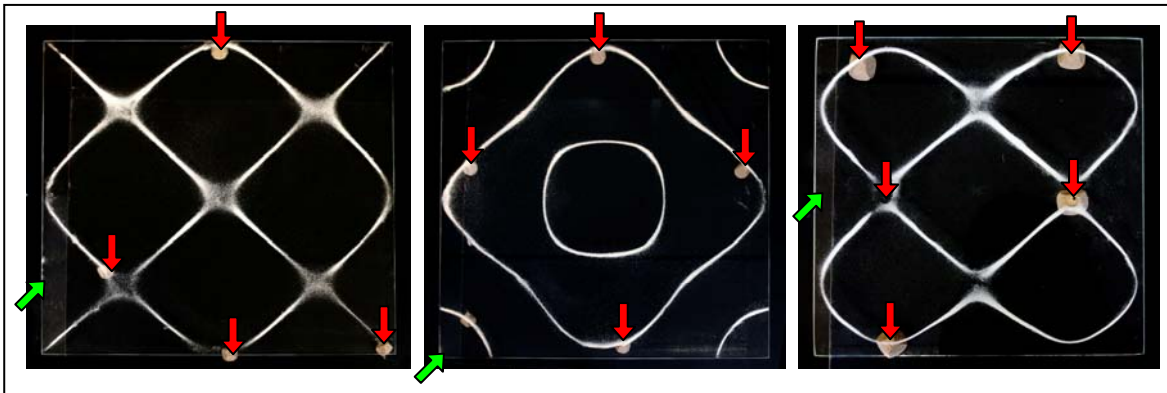


Abb. 23: Einfache Figuren beim Auflegen (links u. mitte: Q4, rechts Q2a)
l.: $\underline{4 \mid 0}$ *m.:* $\overline{4 \mid 2}$ *r::* $\overline{4 \mid 0}$

Bei diesen Figuren auf Q2 genügt es, die Platte auf die Korkstücken aufzulegen ohne noch weitere Punkte mit den Fingern zu dämpfen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass eine unerwünschte Figur erscheint, weil die Platte auf einem passend platzierten Korkstück „springt" und die Dämpfung dort somit unwirksam wird. Dann muss man genau über diesem Stück andrücken. Bei mehr als drei Stücken ist das fast immer dann nötig, wenn sie nahe zusammen stehen, da sie nie exakt die gleiche Höhe haben. Man kann auch einige Lagen Stoff dazwischen legen, die den Höhenunterschied ausgleichen und das Springen verhindern.

Was man den Fotos nicht unbedingt ansieht ist die Tastsache, dass ich die Sandsorte gewechselt habe. Dies war notwendig, weil der feine Sand fast gar nicht mehr zu den Knotenlinien wanderte und stattdessen flächig in den Bereichen der Schwingungsbäuche liegen blieb. Das Phänomen ist leicht zu verstehen und wurde weiter oben schon angedeutet: Bei großen Platten und einfachen Figuren geraten weite Bereiche der Platte ins Schwingen. Durch die Resonanz ist die vertikale Auslenkung dieser Bereiche enorm - ich habe bis ±2 mm messen können. Durch die Aufwärtsbewegung des Bereichs wird der Sand zwar fortgeschleudert, aber nicht weit genug, als dass er dem Zurückströmen der Luft bei der Abwärtsbewegung entkommen kann. So bewegt sich ein einzelnes Sandkorn kaum vom Fleck, es sein denn es befindet sich in der Nähe einer Knotenlinie. Noch feineres Material - Chladni empfiehlt „pulvis lycopodii“, also Bärlappsporen - lagert sich durch diesen Vorgang an den Punkten der maximalen Auslenkung an. Gröberes Material kann genügend Impuls aufnehmen, um nicht wieder „angesaugt“ zu werden - in einem Vakuum sollte dieser Unterschied verschwinden.

Die Ausbeute an einfachen, deutlichen Figuren auf den großen runden Platten K3 und K4 blieb leider recht schwach:

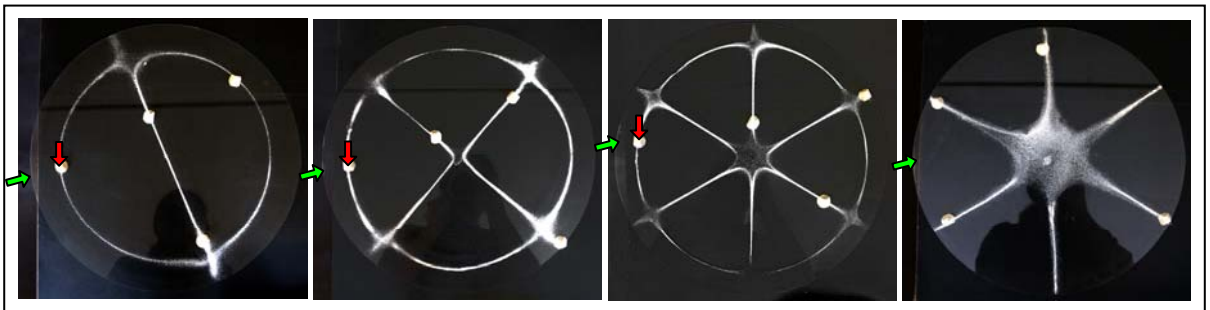


Abb. 24: Figuren auf K3 und K4

Während sich die einfachen problemlos hervorrufen ließen, schaffte ich es nicht, eine der faszinierenden Figuren mit 4 oder mehr Kreisen und Linien zu erlernen. Manchmal traf ich eine entartete Variante davon durch Zufall, wenn ich es mehrere Tage hintereinander versucht habe. Diese ließ sich aber nicht durch langsames Verrücken der Korkstücke in die reine Form überführen, ohne dass sie wieder verschwand. Oft war ich dann nicht einmal in der Lage, die erste Form wieder zu finden. Das übergeordnete Problem liegt hierbei ohne Frage bei der fehlenden Übung. Speziell hatte ich damit zu kämpfen, dass, wenn die Figur nicht beim ersten Strich erschien, sich beim zweiten schon eine ganz andere auszubilden begann. Die Effekte von Bogenposition und Strichstärke/-geschwindigkeit sind erheblich, da durch die

Größe dieser Platten sehr viel mehr Figuren möglich sind, als z. B. auf K1.
Mathematisch gesehen liegen die hohen Eigenfrequenzen viel näher beieinander - manche so nahe, dass es mir nicht gelang, sie durch ihre Tonhöhe zu unterscheiden. Damit wird, zusätzlich zur fortwährenden Praxis, ein geübtes Gehör, wie Chladni es besessen haben muss, unerlässlich.

Die folgende Abbildung stellt einige komplexe Figuren auf K4 dar, die sich nach langem Üben zeigten:

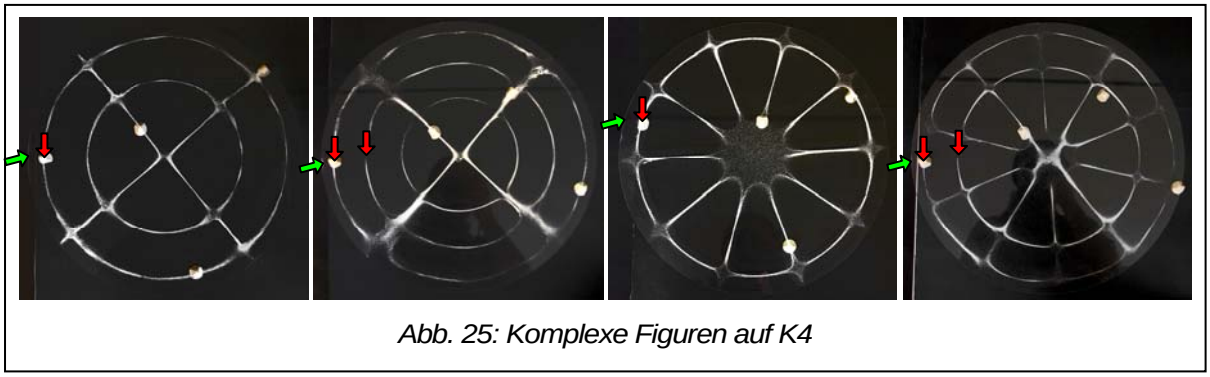


Abb. 25: Komplexe Figuren auf K4

Das erfolgsversprechendste Vorgehen zum Erzeugen mehrerer Kreise kann man am Bild ablesen. Wenn man den Bogen direkt vor einem Korkstück auf einer gedachten Linie durch den Mittelpunkt der Platte ansetzt, kann dort auf keinen Fall eine Linie entstehen. Wenn der Abstand zum Rand richtig gewählt ist, zeigt sich eine Figur mit einigen Kreisen. Will man mehr als zwei Kreise erzeugen, muss man auf dieser gedachten Linie einen weiteren Punkt berühren. Die Anzahl der Linien, die dabei entstehen, ist eher zufällig. Ich konnte durch entsprechendes Positionieren der Korkstückchen nicht mehr als drei Linien gewollt erzeugen, wenn auch noch ein oder mehrere Kreise dabei sein sollten.
Bei mehr als drei Kreisen wird die Eigenfrequenz so hoch, dass sie kaum noch mit dem Bogen zu treffen ist - eine direkt Folgerung aus Gl. (1), die besagt, dass die Frequenz mit der Anzahl der Kreise doppelt so schnell ansteigt wie mit der Anzahl der Linien. Prinzipiell hätten auf K4 bei einer Figur ganz ohne Linien mindestens 4 Kreise möglich sein sollen, schließlich ist es mir auf dieser Patte auch gelungen, eine Figur mit 8 Linien ohne Kreise zu erzeugen, was nach Gl. (1) äquivalent dazu ist.

Auf Q3 bzw. Q4 hatte ich ähnliche, aber bei weitem nicht so stark ausgeprägte Probleme mit der Vielfalt der möglichen hohen Figuren. Mir fiel auf, dass es zwei Figuren gibt, die sich geradezu aufdrängen: Sie tauchen bei den verschiedensten Positionen von Korkstücken und Bogen immer wieder auf, auch wenn die Dämpfungspunkte schlecht zu passen scheinen. So limitiert sich natürlich die Zahl der anderen erreichbaren Figuren, denn man muss unter anderem immer darauf achten, den Bogen so anzusetzen, dass eine Knotenlinie jener markanten Figuren getroffen wird, um selbige zu verhindern.

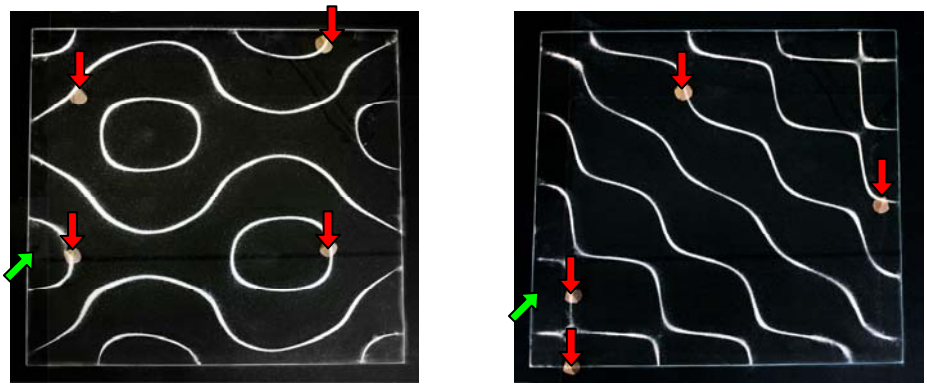


Abb. 26: Markante Figuren auf Q4

Die rechte der beiden Figuren in Abb. 26 stimmt relativ gut mit 5|4 überein, auch wenn die Diagonale nicht ganz gerade ist. Die linke findet sich nicht bei Chladni, sie lässt sich aber gut mit Gl. (23) nachbilden. Dabei sind $i = 7$, $j = 4$, $c_1 = -0{,}5$ und $c_2 = 1$.

Folglich gehört diese Figur in die Kategorie 6|3 und befindet sich logisch zwischen Fig. 31a und Fig. 31b (s. Abb. 6). Bei ihr ist auch das stetige Umwandeln in diese Grundformen sehr einfach, indem man kontinuierlich streicht und dabei die Korkstücke nahe der Streichstelle vorsichtig verschiebt. Mathematisch gesehen sticht diese Figur heraus, denn sie ist eine der wenigen hohen Figuren, die sich auf diese einfache Art modellieren lässt. Das bedeutet auch, es gibt hier kaum Beimischung höherer Eigenfrequenzen.

Chladni geht öfter auf diese so veränderte Klangfarbe ein. Zum Beispiel gibt er an, dass Figuren nach $\underline{n \mid n-2}$ einen „schwachen und spitzigen Klang“ ergeben, diejenigen nach $\overline{n \mid n-2}$ hingegen „sind weit volltönender“[92].

Eine quantitative Charakterisierung der Klangfarbe war ohnehin erst nach Hermann von Helmholtz' *Lehre von den Tonempfindungen* möglich, wo er mit Hilfe von Fourierreihen eine einfache Sinusschwingung als Ton und die Überlagerung mehrerer als Klang definiert. Die (unter Musikern umstrittene) Klangfarbenbestimmung unter zu Hilfenahme von sog. Formanten[93] gibt es erst seit ca. 1930. Geht man nach dieser vor, so entspricht ein „voller“ Klang einer hohen Amplitude der Obertöne zwischen 400 und 600 Hz bzw. dem fehlen höherer Formanten. Ein „spitzer“ Klang wird durch eine um 8000 Hz charakterisiert. Ob sich diese neuere Einordnung mit Chladnis Zuschreibungen deckt, werde ich im letzten Abschnitt untersuchen.

Ich möchte abschließen mit einigen Bemerkungen zu hohen Figuren auf Q4 (s. Abb. 27). Von oben links nach unten rechts sind in der Abbildung folgende Figuren zu sehen:

$\overline{5 \mid 1}$, $\overline{5 \mid 3}$, $\overline{6 \mid 2}$, $\overline{7 \mid 0}$[94] , $\overline{8 \mid 4}$, $\underline{8 \mid 2}$, $\underline{8 \mid 4}$, $8 \mid 7$[95] , $\overline{9 \mid 5}$

Am letzten Beispiel kann man gut erkennen, wie viele Punkte manchmal gedämpft werden müssen, damit eine so komplexe Figur erscheint. Neben den bekannten Korkstücken habe ich noch kleine Schwämmchen benutzt, um einzelne Bereiche leicht zu dämpfen. Dies ist vor allem sehr hilfreich, wenn man noch nicht genau weiß, wo die Knotenlinien liegen, da man durch die ihre leichte Dämpfung grob andeuten kann, wo sie sich befinden sollen.

[92] vgl. [9], *Neue Beyträge*, S. 38

[93] Schwerpunkte von Bereichen mit besonders ausgeprägten Obertönen, oft gewählt in Ähnlichkeit zu menschlichen Vokallauten

[94] in dieser Variante nicht bei Chladni enthalten

[95] diese Figur wird gar nicht bei Chladni erwähnt

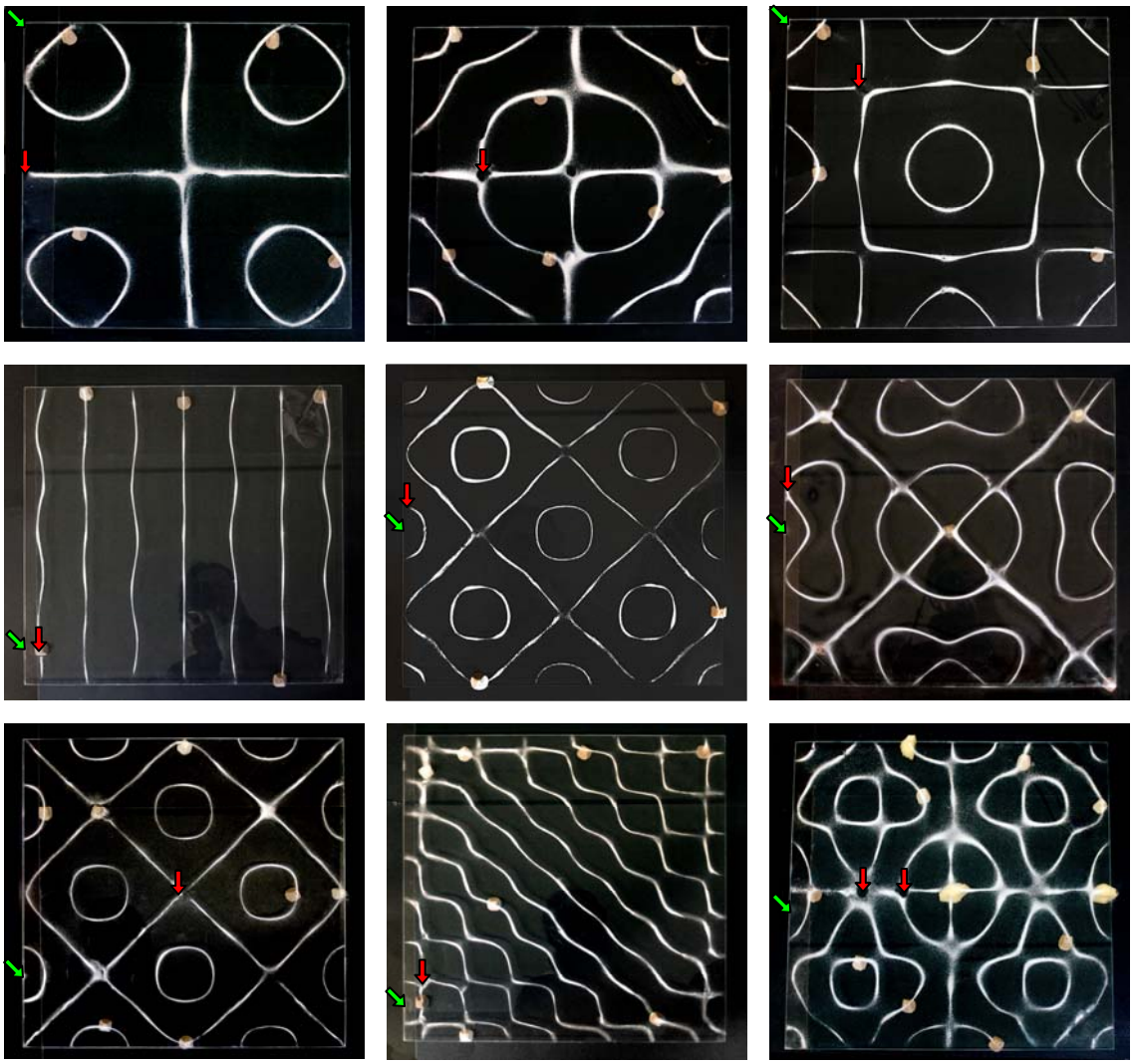


Abb. 27: Komplexe Figuren auf Q4 durch Auflegen

Im Vergleich mit Abb. 23 Mitte erkennt man ein weiteres Prinzip bei Klangfiguren auf großen Platten: Sie entstehen oft als mehrfach aneinander gefügte oder überlagerte Versionen einfacher Figuren auf kleinen Platten. Die Kategorie der Figur kann man sich dadurch leicht ausrechnen, wenn man erkennt, wie oft sich die zu Grunde liegende einfache Figur an jeder Kante der großen Platte wiederholt. In diesem Fall ist es $\overline{4|2}$ mit einer zweifachen Wiederholung. Das führt offensichtlich zu $\overline{8|4}$. Dem ganzen ist noch die Grundfigur $1|1$ überlagert - man kommt also auf diese einfache Weise zur richtigen Einordnung.

Kurz vor Abschluss dieser Arbeit ist es mir noch gelungen, selbige Figur mit wesentlich weniger Aufwand zu erzeugen. Dies wird auch die Art gewesen sein, die Chladni bevorzugt hat. Dabei legt man die Platte nur an den Seitenmitten und zentral auf. Nun kann man die Figur allein durch Erzwingen der speziellen „Heugabel“-Form an

einer Seitenmitte hervorrufen. Zwar besitzen auch andere Figuren diese Form, doch wenn man den Abstand der Knotenlinienenden exakt trifft, erzeugt man sie leicht durch schnelles und festes Streichen zwischen den Enden. Auf diese Weise entstand auch die Figur unten links in Abb. 27. Nur die zusätzlichen Korkstücke sorgen dafür, dass beim ersten Strich $\underline{8|4}$, und nicht $\overline{9|5}$ erscheint. Noch höhere Figuren sind kaum mehr möglich, da ich den Bogen nicht noch fester andrücken kann, ohne dass er „quietscht". Dann tritt eine Eigenfrequenz des zugrunde liegenden Stick-Slip-Effektes (s. S. 40) zutage und der Bogen wird nutzlos. Unter diesen Umständen würde nur eine Reduzierung der Plattendicke Abhilfe schaffen, d. h. das Tor zu noch komplexeren Figuren öffnen.

Versuche unter Verwendung einer Halteklammer

Wie zu Anfang erwähnt, habe ich, angeregt durch eine Abbildung in Chladnis *Akustik*, eine Halteklammer entworfen, mit der man Platten unterschiedlicher Ausmaße variabel fixieren kann. Es sollte so möglich sein, die meisten der oben angeführten Figuren auch mittels dieser Apparatur zu erzeugen. In diesem Kapitel möchte ich die Vorzüge und Nachteile dieser Haltevorrichtung in Bezug auf die Handhabbarkeit bei den Versuchen und eventuelle Auswirkungen auf die Form der Figuren erläutern.
Der *Akustik* sind keine genauen Maße der Klammer zu entnehmen und ihre Skizze kann auch nicht maßstabsgetreu gezeichnet sein. Ich bin auf einige Abbildungen von ähnlichen Halterungen gestoßen, die einige Zeit nach Chladnis Wirken für den Nachvollzug seiner Experimente zur Verfügung standen. Die in Abb. 28 dargestellte diente mir als Vorlage. Da es an dieser Stelle nicht um einen exakten Nachbau geht, sondern um die Anwendung dieses Halteprinzips, habe ich in Bezug auf diese Abbildung noch einiges abgewandelt. Am besten erkennt man die Unterschiede am Bild (vgl. Abb. 28 mit Abb. 29).

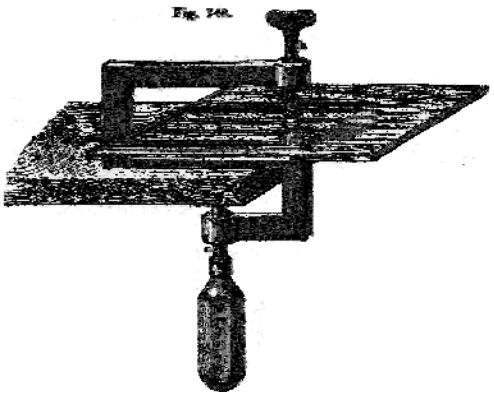


Abb. 28: Vorlage für die Konstruktion der Halteklammer (um 1886)

Bei dem Material handelt es sich um hochfesten Baustahl, damit die Streben der Klammer sich durch das Anziehen der Messingschrauben nicht zu stark biegen.
Inspiriert durch eine andere Abbildung im gleichen Werk kam ich auf die Idee, noch zwei weitere, verschiebbare Fixierungsmöglichkeiten hinzuzufügen, um sie auf ihre Nützlichkeit zu prüfen.

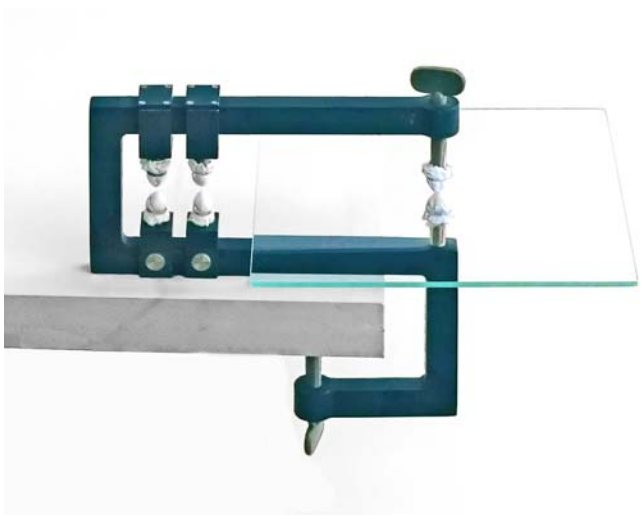


Abb. 29: Halteklammer mit Platte Q2b

In Abb. 29 sind dies die vier ebenfalls mit Messingschrauben bestückten Reiter. Die beiden unteren lassen sich durch eine kleine Schraube an der Strebe fixieren, die beiden oberen erhalten ihre Festigkeit dadurch, dass sie die obere Strebe umfassen und die Platte gegen einen der unteren Reiter pressen.
Alle Schraubenenden sind konisch zugespitzt und haben am Ende eine Auflagefläche, damit sich die eingespannte Platte nicht neigen kann. Sie sind zum Schutz der Platte mit Stoff überzogen.
Bei kleinen Platten war ich von den guten Ergebnissen dieser Methode überrascht, allerdings funktionierte einiges nicht so, wie zu Anfang geplant. Dazu gehört, dass es grundsätzlich nicht ausreicht, die Platte nur an einem Punkt zu befestigen, da sie sich beim Streichen mit dem Bogen relativ leicht neigt. Spannt man sie sehr fest ein, kann man dem zwar entgegenwirken, dann allerdings laufen die Linien dort, wo sie sich bei der entsprechenden Figur kreuzen sollten, aneinander vorbei.
Dies ist nach Soedel ([34]) der Dämpfung zuzuschreiben. Sie hat den Effekt, dass der eigentlichen Figur noch alle für diesen Fixierungspunkt möglichen Figuren überlagert werden, darunter am stärksten diejenige mit der niedrigsten Eigenfrequenz.

Am fixierten Punkt mögen sich die Linien also noch kreuzen, weiter entfernt wird der Einfluss der niederen Eigenfunktionen aber deutlich sichtbar. Die Dämpfung hat also Auswirkungen auf die gesamte Platte.
Die Detailaufnahmen derselben Stelle einer Figur in Abb. 30 geben einen Eindruck davon. Links ist die Platte leicht eingespannt und muss an einer anderen Stelle zusätzlich gehalten werden, rechts ist sie sehr fest eingespannt und lässt sich ohne zusätzliches Halten spielen. Hier kann man davon ausgehen, dass es die Grundmode 1|1 ist, die als niedrigste mögliche mitschwingt.

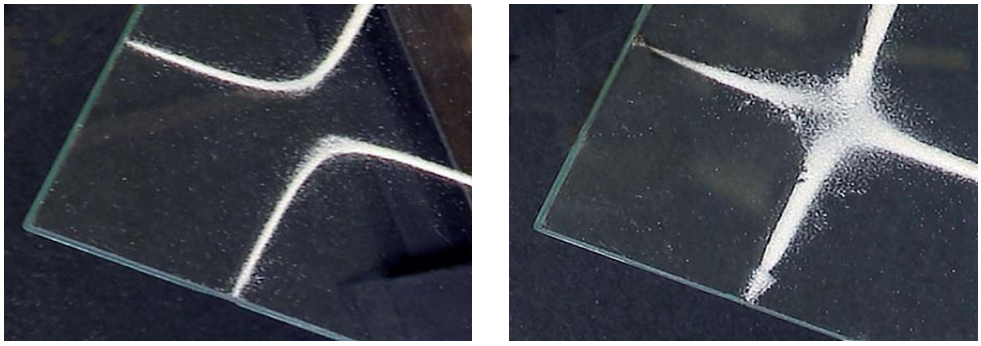


Abb. 30: Dämpfungseffekte an einer Kreuzungsstelle der Figur 2|2 als Folge der Überlagerung mit 1|1. links: starke Dämpfung; rechts: schwache Dämpfung

Folgendes Bild zeigt, wie sich mit diesem Prinzip eine Superposition der Figuren $\underline{2|0}$ und $\overline{2|0}$ erzeugen lässt, welche die Idealform von 2|0 mit graden Linien schon erahnen lässt.

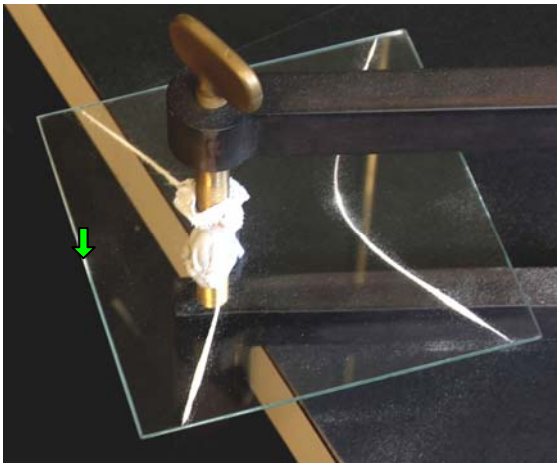


Abb. 31: Annäherung an 2|0

Dies ist mir nur mit Hilfe der Klammer gelungen, da ich den dazu erforderlichen Anpressdruck mit den Fingern nicht erzeugen konnte. Chladni äußert sich zu dieser Figur wie folgt:

> „Man kann zwar […] Fig. 2 und Fig. 3 [$\underline{2\,|\,0}$ und $\overline{2\,|\,0}$, d. A.] mit vielem Zwange so umändern, dass sich die Linien voneinander trennen, […] aber eine grade Richtung der Linien […] läßt sich, wenn die Platte nur einigermaßen regelmäßig ist, schlechterdings nicht erreichen." ([9], *Neue Beyträge*, S. 20)

Neben der „globalen" Dämpfung gibt es erwartungsgemäß einen lokalen Effekt direkt um den Einspannpunkt herum. Dort ist die Platte nämlich nicht, wie von Chladni gefordert, gelenkig gelagert, sondern muss sich gegen ihre innere Steifigkeit verbiegen. So verringert sich die Amplitude der Auslenkung um die Einspannstelle herum und infolge dessen kommt der Sand eher zur Ruhe. Das Ergebnis ist ähnlich dem bei sternförmigen Figuren mit vielen Linien auf runden Platten.
Da die Schwingung durch das feste Einspannen mehr Arbeit verrichten muss, wird ihr kinetische Energie entzogen. Hierin hat man auch die Ursache für die globale Dämpfung gefunden.
Die beiden Fotos in der nachstehenden Abbildung geben einen Vergleich von starker (l.) und schwacher (r.) lokaler Dämpfung:

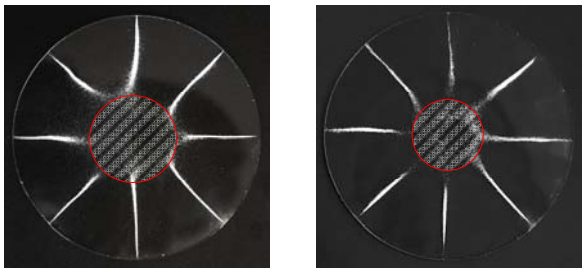


Abb. 32: Lokale Dämpfung um die Einspannstelle herum
Der rote Kreis markiert, bis wohin sich der Sand noch zu scharf abgegrenzten Linien anordnet.

Theoretisch müsste sich auch ein geringer Effekt auf die Höhe der Eigenfrequenz nachweisen lassen. Eine Messung habe ich dazu allerdings nicht durchgeführt.

Wenn man diese Effekte berücksichtigt, ist man in der Lage sehr schöne Figuren zu erzeugen. Während vorher frei Gehaltene mit der Klammer filigraner werden sind auch noch höhere möglich, die mir nur auf diese Weise zugänglich waren.
Ersteres erkennt man links in Abb. 33. Die Figur in der Mitte kommt bei Chladni

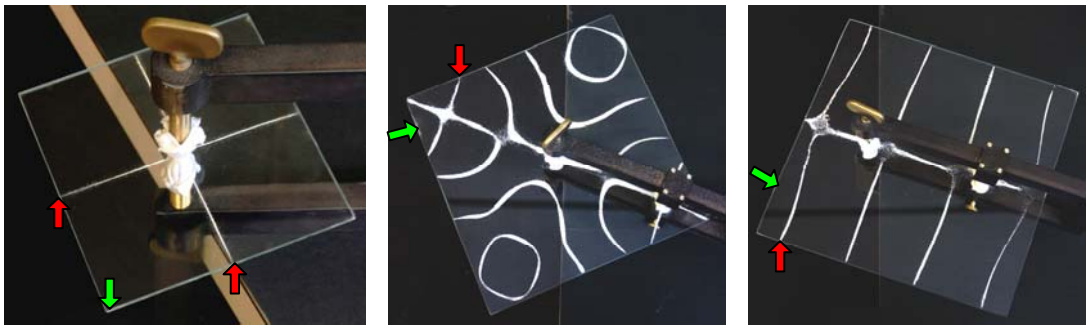


Abb. 33: Figuren auf Q2b (l.) und Q2a (m. & r.)

nicht vor und ich war auch nicht in der Lage sie zu simulieren. Wahrscheinlich handelt es sich um eine Variante von $5\,|\,2$. Die rechte Figur ist eindeutig $4\,|\,1$.
Die zusätzlichen Fixierungsmöglichkeiten haben sich für kleine Platten als nicht besonders nützlich herausgestellt. Hier kann man die drei Punkte, die zum Stabilisieren nötig sind, sehr gut mit den Fingern erreichen. Nur bei größeren Platten ist das nicht möglich, so dass ein zusätzlicher Einspannpunkt, wie in Abb. 34 dargestellt, gute Dienste leistet.
Da sich die drei Einspannpunkte der Klammer auf einer Linie befinden, muss man ohnehin noch einen weiteren außerhalb davon halten, damit die Platte nicht kippen kann. Der dritte Reiter ist also in jedem Fall überflüssig.

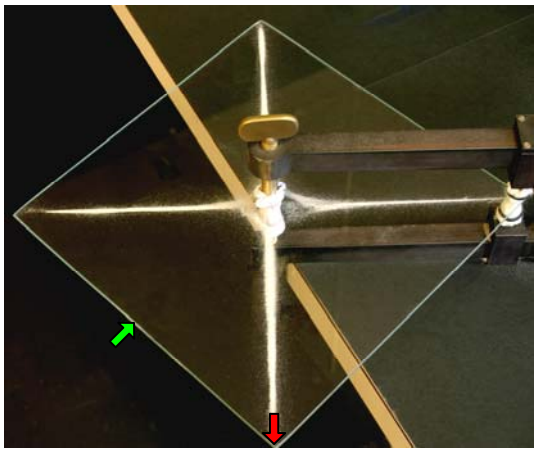


Abb. 34: Q3 an zwei Punkten eingespannt

Wie schon angedeutet ist die Halteklammer für das Hervorbringen der sternförmigen Figuren auf runden Platten besser geeignet als jede andere Methode. Dazu befestigt man sie ähnlich wie Q3 in Abb. 34 einmal in der Mitte und zusätzlich am Rand.

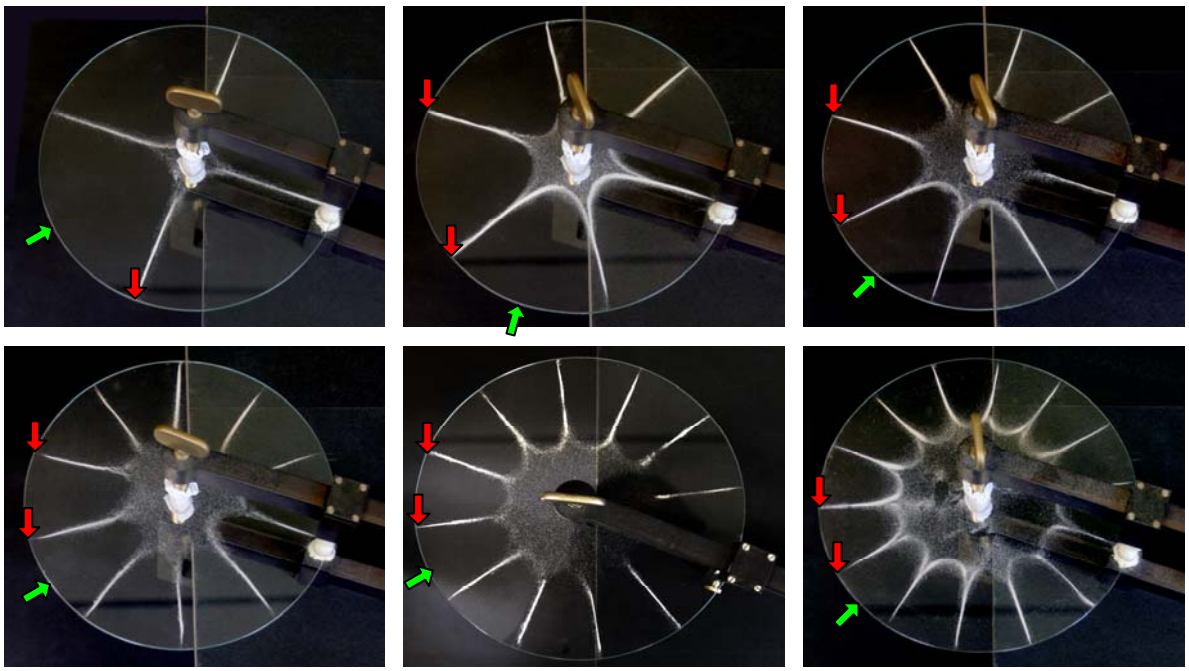


Abb. 35: Alle erzeugbaren sternförmigen Figuren auf Q2b

Das Vorgehen ist dasselbe wie bei der Methode des Anstemmens, nur muss man hier die Hebelkräfte besser kompensieren kann, was eine erhebliche Erleichterung darstellt. So kann man mit zwei Fingern den Abstand zweier Linien vorgeben und an der passenden Stelle im halben Abstand daneben streichen.
Prinzipiell ist die Halteklammer also hilfreich, wenn es um das Hervorbringen höherer Figuren auf kleinen Platten oder schönere Versionen auch anders erzeugbarer Figuren geht. Bei Chladni kam es darauf aber nicht an. Für die Herleitung des Proportionalitätsgesetzes griff er in seinen *Entdeckungen* auf Stäbe zurück.
Zur Erlangung schönerer Figuren nach unserer Definition schreibt Chladni nichts und es ist anzunehmen, dass die Abbildungen in seinen Werken immer auch einen gewissen Grad der Idealisierung nach seinen Vorstellungen beinhalten. Dies ist insofern legitim, als dass er sich mit seinen eigenen Ohren davon überzeugen konnte, dass kleine Änderungen und Ungenauigkeiten keine hörbaren Auswirkungen auf die Tonhöhe haben.

Analyse einiger physikalischer Aussagen Chladnis

In diesem Kapitel möchte ich nun zwei Aussagen Chladnis in Bezug auf die Gesetzmäßigkeiten überprüfen, die er bei seinen Versuchen entdeckte. Die erste ist das schon häufiger angesprochene Proportionalitätsgesetz nach Gl. (27), und die zweite seine Aussage über die Klangfarbenunterschiede der Kategorien $\overline{n \mid n-2}$ und $\underline{n \mid n-2}$ (S. 81).

Für diese Aufgaben verwende ich ein etwas moderneres Equipment: Ein Mikrophon und eine Software[96], die in der Lage ist, anhand Fourieranalyse des eingehenden Signals dessen Frequenzspektrum darzustellen. Die Eigenfrequenz wird auf diese Weise durch einen scharfen Peak markiert.
Mit Chladnis Methode, bei der er immer zwei Figuren nacheinander erzeugt und das musikalische Intervall zwischen ihren Tönen durch Hören bestimmt, hätte ich keine Chance, an verwertbare Ergebnisse zu kommen. Mit viel Übung ist das Hintereinander-Erzeugen möglich, allerdings besitze ich kein musikalisch geschultes Gehör.

Ich werde den Test der ersten Aussage nur für quadratische Platten durchführen, da ich von ihnen eine bessere Auswahl an verschiedenen Dicken habe und sich auf ihnen die Figuren leichter hervorbringen lassen.

Folgende Tabelle fasst die Messergebnisse zusammen:

Figur		1,9				2,9	3,9	d in mm[2)]
Kat.	Nr.[1)]	120	229	380	457	229		l in mm[3)]
2|2	5	2112	580	208	144	884	1210	Eigenfrequenz in Hz (rel. Fehler ≈5‰)
3|0	6a	1969	546	196	135	832	1137	
$\overline{3 \mid 1}$	8	2304	680	246	170	1048	1434	
3|2	9b	3458	950	344	239	1454	1986	
$\underline{4 \mid 0}$	11a	3809	1048	377	263	1600	2188	
$\underline{4 \mid 2}$	14	5295	1451	528	366	2215	3017	

[1)] *Neue Beyträge* [2)] Fehler ±0,1 mm [3)] Fehler ±2 mm

Tab. 3: Gemessene Eigenfrequenzen versch. Figuren auf quadratischen Platten abhängig von Dicke d und Kantenlänge l

[96] Cool Edit Pro 2.1 der Firma Syntrillium
(mittlerweile Freeware, da fortgeführt durch Adobe® Audition® 2.0)

Zur Auswertung der Messergebnisse aus Tabelle 3:

Für die Auswertung nach der Kantenlänge bietet es sich an, zu jeder Figur den gemessenen Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit von l mit einer Funktion $\tilde{f}_i(l) = \alpha_i \cdot l^{-x_i}$ zu vergleichen. Im Idealfall wird sich für jede Figur ein Wert von x nahe bei 2 ergeben. Dies entspricht der Tatsache, dass die Eigenfrequenz einer Figur/Eigenfunktion quadratisch mit steigender Kantenlänge abnimmt. Die Werte der α_i sind für diesen Teil der Untersuchung unbedeutend - sie enthalten die anderen Platteneigenschaften. Das Ergebnis über alle Figuren gemittelt lautet $\bar{x} = 2,002 \pm 0,011$ und entspricht den Erwartungen.

Für die Auswertung nach der Dicke vergleiche ich den gemessenen Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit von d mit einer Funktion $\tilde{f}_i(d) = \beta_i \cdot d$. Da ich jeweils nur drei unterschiedliche Dicken vergleiche, macht es wenig Sinn, wie im vorigen Fall den Exponenten zu bestimmen, da die Unsicherheit bei so wenigen Messwerten zu groß ist. Stattdessen gehe ich hier direkt von einer linearen Abhängigkeit aus und überprüfe die Güte dieser Hypothese indirekt durch den mittleren relativen Fehler $\bar{\sigma}_{\beta_i}$ über alle Proportionalitätskonstanten β_i. Anschaulich geben die σ_{β_i} darüber Auskunft, wie gut die Werte auf einer Geraden mit der Steigung β_i liegen.
Hier ist das Ergebnis mit $\bar{\sigma}_{\beta_i} \approx (5,8 \pm 0,4)$ ‰ sehr gut. Offenbar liegen die drei Dicken grade in einem Bereich, der von der vereinfachten Theorie sehr gut beschrieben wird. Für besonders dicke ($d \gtrsim l/10$) oder dünne Platten ($d \lesssim l/200$) ist dies nicht mehr gegeben.

Für die Klangfarbenuntersuchung ziehe ich die Kategorien 2|0, 3|1 und 4|2 heran. Am Besten erkennt man die Lage der Formanten im zeitabhängigen Frequenzspektrum. Die folgende Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der interessanten Bereiche dieses Spektrums von $\overline{4|2}$ und $\underline{4|2}$, gemessen auf Q3.

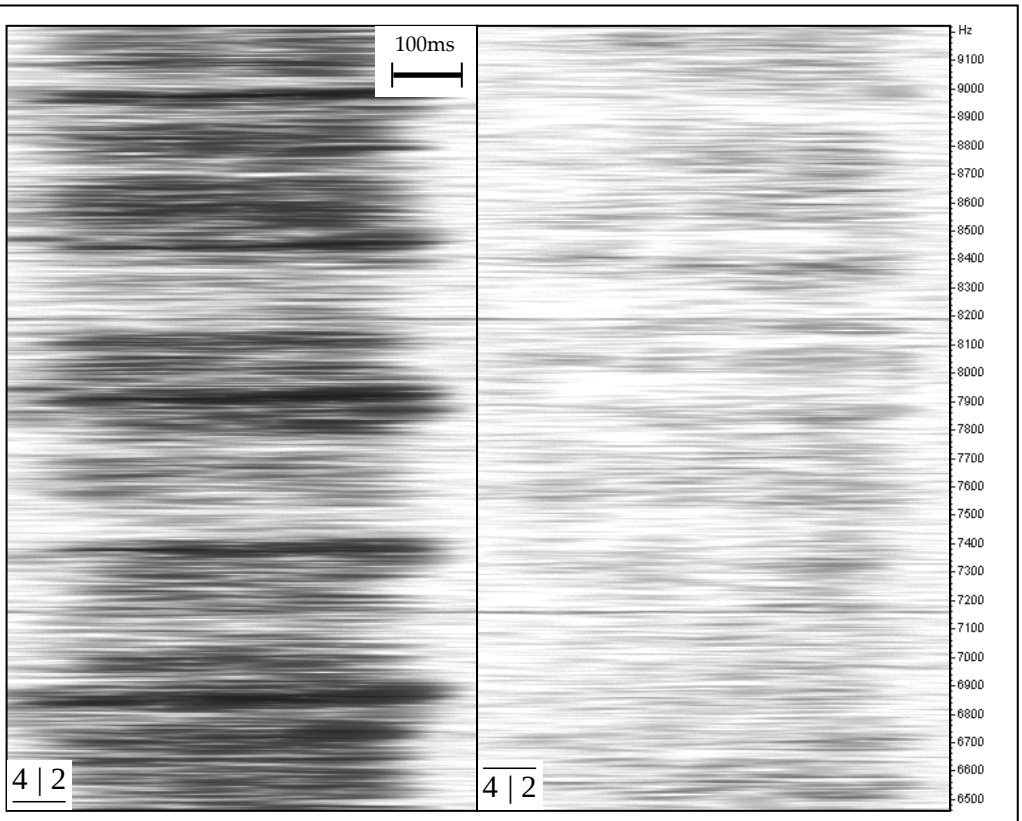


Abb. 36:Normierte Leistungsspektren zweier Figurvarianten auf Q3 zwischen 6500 Hz und 9200 Hz (schwarz: maximale Leistung)

Man erkennt sehr gut die allgemein stark ausgeprägten hohen Frequenzen im linken Bild, nicht nur im Bereich um 8000 Hz, die im rechten Bild fast völlig fehlen. Dieses Ergebnis, welches sich bei den anderen Figuren übrigens ähnlich deutlich zeigt, spricht für Chladnis subjektive Einschätzung. Interessant wäre hier eine Untersuchung, ob neuere Theorien dieses Ergebnis vorhergesagt hätten.

Es macht allerdings wenig Sinn, hier von einem oder mehreren Formanten zu sprechen, da der Bereich der Amplitudenerhöhung kaum begrenzt ist.

Das schnelle Abklingen der hohen Frequenzen nach dem Absetzten des Bogens scheint mir ein Indiz dafür zu sein, dass es sich hier um einen Effekt handelt, der durch das Streichen hervorgerufen wird. Das ruckartige Anhaften des Bogens könnte der Auslöser dafür sein. Leine e.a. ([47]) bieten dafür eine Erklärung an, die sich direkt auf den Stick-Slip-Effekt bezieht.

Die dort vorgenommene Modellierung für das Ruckgleiten an Violinensaiten berücksichtigt, was auch an Platten ein wichtiger Faktor ist: die mögliche periodische Antwort des angeregten Systems und sein Resonanzverhalten. Das Ergebnis der Modellierung liefert für die Saite ein ähnlich breitbandiges Frequenzspektrum wie das hier gemessene. Eine analoge Untersuchung für Platten scheint noch nicht durchgeführt worden zu sein.
Zu den Auswirkungen solcher Effekte auf die Schwingungsform, und damit, wie wir heute wissen, auf die Klangfarbe, schreibt Chladni (für eine Saite):

> „Wenn nun der erste Impuls zu schnell und zu heftig auf einen kleinen Teil der Saite wirkt […], wo also die Biegung eckig ausfallen muss […], so muss durch alle diese Verschiedenheiten des Impulses, und also auch der Gestalt, welche die Saite anfangs annimmt, auch eine Verschiedenheit des Lautes, welche sie giebt, bewirkt werden.“ (in [17], S. 173)

Diese Aussage stammt aus einem kurzen, 1827 veröffentlichten Artikel. Fünf Jahre zuvor hatte Jean Baptiste Joseph Fourier seinen Beweis erbracht, dass alle periodischen Funktionen durch Reihen von trigonometrischen Funktionen approximiert werden können. Ob Chladni von diesem Ergebnis Kenntnis erlangt hatte, lässt sich aus seiner Aussage nicht rekonstruieren. Ohnehin wurde dieses Prinzip erst 1843 durch Ohm auf akustische Signale angewandt.

Abschließende Bemerkungen

Am Besten fange ich an mit meinen ganz persönlichen Eindrücken, die ich im Verlauf dieser Arbeit sammeln konnte. Das größte Gewicht hatte dabei der Umstand, mich so intensiv mit einem Arbeitsfeld Chladnis auseinandersetzen zu können. Auch oder grade weil heutzutage vieles einfacher ist, wie die Beschaffung geeigneter Glasplatten oder die Messung der Tonhöhe einer Klangfigur, ist der Nachvollzug seiner Experimente so lehrreich. Bestünden heute noch all diese Probleme, wäre es in so kurzer Zeit gar nicht möglich gewesen, einen so „intimen“ Kontakt mit der Forschungswelt dieses Wissenschaftlers aufzubauen. Gerade die Einblicke in all jene kleinen Dinge, die er tagtäglich bei seinen Experimenten zu meistern hatte sind es, die das Bild dieses Nomaden der Wissenschaft vervollständigen und lebendig werden lassen.

Doch das ist nur eine Ebene. Durch meine Beschäftigung mit seinen anderen Beiträgen zur Akustik wurde mir klar, dass, auch wenn speziell Klangfiguren nach seinem Tod für die Wissenschaft keine tragende Rolle mehr spielten[97], ich seine Leistungen für die „Akustik“ als Teilbereich der Physik anfangs weit unterschätzt habe. Tatsächlich scheint es so, als ob die Zeit reif war für eine Neu- oder besser für überhaupt eine Ordnung all der Experimente und Erkenntnisse aus Musik, Mechanik und Alltagswissen. Mit wenigen einfachen Setzungen und der geschickten Aufklärung von Missverständnissen konnte Chladni genau dies gelingen. Dass die Wurzeln seines Vorgehens eigentlich in der Antike zu suchen sind, zeigt, wie viel Wahrheit in seiner Aussage steckt:

> „Bei so vielen neuern Vermehrungen menschlicher Kenntnisse […] hat die Akustik das unverdiente Schicksal gehabt, weit mangelhafter als andere Theile der Naturkunde, behandelt zu werden.“ [10], S. III

Die Beschäftigung mit der Akustik vor Chladni wirft zudem ein neues Licht auf seine Versuche. Die Jahrzehnte vor seinem Wirken beschränkte sich die Methodik des Experimentieren fast nur noch darauf, mathematische Theorien und Modelle auf ihre Richtigkeit zu prüfen - war also das Experiment der Theorie nachgeordnet und wurde zielgerichtet durch sie geformt. Chladni durchbricht diese Linie, indem er nach

[97] bald nach Chladnis Tod fanden viele Wissenschaftler gefallen an seinen Klangfiguren, wie z.B. der dänische Physiker und Chemiker Hans Christian Ørsted oder der britische Physiker Charles Wheatstone. Sie dienten dort aber eher als physikalische Spielerei oder Analogieexepriment. Leider dienten die Klangfiguren zu jener Zeit auch als Vorlage für etliche pseudowissenschaftliche Exkurse.

langer Zeit wieder Neuland betritt und Ergebnisse liefert, für die noch keine Theorie existiert.
Chladni selbst leitet diesen „Sprung ins kalte Wasser“ aus einem inneren Drang ab, auf einem Gebiet etwas zu leisten, dass vorher noch niemand betreten hat. Dieser Entdeckergeist hätte durch die ungünstigen Startbedingungen nicht fruchten können, wäre Chladni nicht das liebenswürdige „Original“ gewesen, für das er gehalten wurde. Die Konsequenz, mit der er sowohl wissenschaftliche als auch persönliche Ziele verfolgt und schließlich verbinden kann ist beachtenswert.
Chladnis Leistungen für die Ver-*öffentlich*-ung und Anerkennung der Akustik werden oft in der Aussage destilliert, Chladni sei der „Begründer der Akustik“. Wenn man die These eingehender überprüfen möchte, könnte man zunächst zu ihrer Spezifizierung den wissenschaftstheoretischen Ansatz von Thomas S. Kuhn heranziehen. Danach befand sich die Akustik bis zum Zeitpunkt der breiten Anerkennung von Chladnis *Akustik* in einem protowissenschaftlichen[98] Stadium. Wissenschaftler, die in diesem Gebiet forschten, hatten noch kein gemeinsames Paradigma über ihre Disziplin - es herrscht höchstens unbewusste Übereinstimmung über Methoden und Inhalte. Allerdings ohne, dass man von Einigkeit über die logische Struktur oder den Geltungsbereich einer übergeordneten Disziplin hätte sprechen können. Es muss sich dann aber um einen eher „leisen“ Umbruch gehandelt zu haben, der viele von Kuhn postulierte Merkmale nicht erfüllt - hier wäre also noch einiges an Detailarbeit nötig.

Auch wenn man sie selten zu Gesicht bekommt - ganz in der Versenkung verschwunden sind die Klangfiguren noch lange nicht. Auf zwei ganz verschiedene Arten haben sie einen festen Platz in der Geschichte eingenommen. Um 1817 wurde durch den franzosischen Arzt und Physiker Félix Savart eine neue Methode zur Überprüfung der Qualität von Geigen vorgestellt. Er bediente sich dazu der Klangfiguren, die beim Spielen auf Boden und Decke des Instruments entstehen können. Je symmetrischer sie sind, um so reine wird die Geige später klingen. Diese Methode revolutionierte den Herstellungsprozess solcher Instrumente, da man nicht mehr nur auf das Gehör und langjährige Erfahrung angewiesen war, um diese Teile perfekt anfertigen zu können. Noch heute wird dieses Verfahren bei der handwerklichen Herstellung von Geigen- und Gitarrenkorpora angewandt.

[98] Der Begriff „präparadigmatisch“ ist für diese Zeit unangebracht, da man davon ausgehen muss, dass in verschiedenen Kreisen der Wissenschaft schon (unterschiedliche) paradigmatische Strukturen zur Akustik zu finden sind.

An anderer Stelle dienten und dienen die Klangfiguren immer wieder als Demonstrationsexperiment zur Veranschaulichung von Eigenschwingungen fester Körper. Sie machen dabei deutlich, wie stark der Schritt von schwingen Stäben zu schwingen Flächen die Komplexität des Phänomens anwachsen lässt.
Einen ganz modernen Blick auf die Klangfiguren gewinnt man mit dem Formalismus der Quantenmechanik. Wenn man sich hier die Frage stellt „Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines quantenmechanischen Teilchens in einem beliebig geformten Potentialkasten?“[99] und dieses Problem mathematisch angeht, entdeckt man eine verblüffende Ähnlichkeit zwischen der stationären Schrödinger-Gleichung für das eingesperrte Teilchen und der Wellengleichung, wie sie uns in Gl. (19) begegnet ist. Das Problem ist prinzipiell chaotisch und nicht mehr analytisch lösbar, wenn der Kasten keine gradlinige Berandung besitzt. Durch die Analyse der Klangfiguren und ihrer Eigenfrequenzen auf einer genau so geformten Platte kann man dennoch sehr gute Aussagen über das Geschehen machen, dass eigentlich auf einem ganz anderen Maßstab passiert.

[99] Diese Fragestellung wird auch unter der Bezeichnung „Quantenbillards“ behandelt., da sich die Trajektorien des Teilchens im Kasten unter gewissen Umständen so verhalten wie die einer Billardkugel auf einem solcherart geformten Tisch.

Quellenangaben

Literatur

[1] Loewenfeld, K: *E. F. F. Chladni. Skizze von Leben und Werk*, Abhdlgn. des Naturw. Vereins zu Hamburg Bd. 22 H. 2/4 1929

[2] Ullmann, Dieter: *E. F. F. Chladni*, Leipzig 1983

[3] Weber, Wilhelm Eduard: *Lebensbild E. F. F. Chladnis*, Wilhem Weber's Werke, Bd. 1, Berlin 1892

[4] Bernhardt, Wilhelm: *Dr. Ernst Chladni, der Akustiker*, Wittenberg 1856

[5] Ebstein, Erich: *Aus Chladnis Leben und Wirken*, Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaft, Bd. 4, 1905

[6] Ebstein, Erich: *Chladnis Vortragsreise durch Norddeutschland im Jahre 1817*, Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaft, Bd. 6, 1907

[7] Ullmann, Dieter: *Chladnis Italienreise nach Briefen an J.P. Schulthesius*, NTM-Schriftenreihe Gesch. Naturwiss., Technik, Med., Bd. 19, 1982, 2, S. 51-57

[8] Schimank, H.: *Beiträge zur Lebensgeschichte von E. F. F. Chladni*, Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, Bd. 37, 1953, S. 370-367

[9] Chladni, E. F. F. : *Entdeckungen über die Theorie des Klanges - Neue Beyträge zur Akustik - Beyträge zur praktischen Akustik und zur Lehre vom Instrumentbau*, Neudr. d. Orig.-Ausg. 1787, 1817 u. 1821, Leipzig 1980

[10] Chladni, E. F. F. : *Die Akustik*, Nachdr. der Ausg. Leipzig 1802, Olms 2004

[11] Chladni, E. F. F. : *Über die Longitudinalschwingungen der Saiten und Stäbe*, Erfurt 1796

[12] Chladni, E. F. F. : *Ueber den Ursprung der von Pallas gefundenen und anderer ihr ähnlicher Eisenmassen und über einige damit in Verbindung stehende Naturerscheinungen* (1794), Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 258, Leipzig 1979

[13] Czegka, W.: *Die Entstehung und frühe Diskussion von E. F. F. Chladnis Schrift: "Ueber den Ursprung der von Pallas gefundenen und anderer ihr ähnlicher Eisenmassen und über einige damit in Verbindung stehende Naturerscheinungen"*, Chemie der Erde, Bd. 53, 1993, 4, S. 376-391

[14] Chladni, E. F. F. : *Ueber Feuer-Meteore und über die mit denselben herabgefallenen Massen*, Wien 1819

[15] Chladni, E. F. F. : *Kurze Übersicht der Schall- und Klanglehre*, Mainz 1827

[16] Ullmann, Dieter: *Chladni und die Entwicklung der experimentellen Akustik um 1800*, Vorgel. von C. Truesdell, Akad. d. Wissensch. d. DDR 1983

[17] Ullmann, Dieter: *Chladni und die Entwicklung der Akustik von 1750-1860*, Birkhäuser 1996

[18] Beyer, Robert Thomas: *Sounds of our times: two hundred years of acoustics*, Springer 1999

[19] Hunt, F. V.: *Origins in Acoustics*, Acoustical Society of America 1992

[20] Waller, Mary D.: *Chladni Figures - A Study in Symmetry*, G Bell 1961

[21] Kirchhoff, Gustav: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 40, 1850

[22] Kirchhoff, Gustav: *Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe*, Annalen der Physik und Chemie, 3. Reihe 81 1850

[23] Kluge, Gerhard: *Biegeschwingungen quadratischer Kristallplatten*, Jenaer Jahrbuch 1961

[24] Truesdell, Clifford A.: *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638 - 1788*, introd. to Leonhardi Euleri Opera omnia vol. X et XI ser. secundae, Orell/Füssli 1960

[25] Philosophische Gesellschaft an der Universität zu Wien: *Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik : Galilei, Newton, D'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz*, Leipzig 1899

[26] István Szabó e.a: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Springer 1987

[27] Barbera, André: *The Euclidean Division of the Canon: Greek and Latin Sources*, University of Nebraska Press 1991

[28] Gouk, Penelope: *Music, Science, and Natural Magic in Seventeenth-Century England*, Yale University Press 1999

[29] Graf, Ernst : *Die Theorie der Akustik im griechischen Altertum*, Gumbinnen 1894

[30] Abraham, Otto e.a.: *Studien über das Tonsystem und die Musik der Japaner*, Sammelbände der Internationalen Musikgesellschaft 1903

[31] Neuwirth, Jürgen: *Schall wahrnehmen und aufzeichnen - Akustik im Unterricht*, Diplomarbeit, Wien 2002

[32] Szilard, Rudolph: *Theories and Applications of Plate Analysis: classical, numerical and engineering methods*, John Wiley and Sons 2004

[33] Leissa, Arthur W.: *Vibration of plates*, Washington 1969

[34] Soedel, Werner: *Vibrations* of *shells* and *plates*, New York 2004

[35] Voigt, Johann Gottfried: *Beytrag zu den Versuchen über die Klangfiguren schwingender Flächen*, Neues Journal der Physik, Bd. 3, 4, S. 391-399, Leipzig 1796

[36] Janich, Peter (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsforschung*, München 1981

[37] Kuhn, Thomas S.: *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*, Frankfurt 2003

[38] Kanitscheider, Bernulf: *Philosophie und moderne Physik: Systeme, Strukturen, Synthesen*, Darmstadt 1979

[39] Gloy, Karen: *Die Geschichte des wissenschaftlichen Denkens*, München 19995

[40] Mach, Ernst: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Nachdr. d. Ausg. Leipzig 1912, Frankfurt/Main 1982

[41] Martin Ehmann: *Die Visualisierung akustischer Schwingungen nach Chladni: Experimenteller Nachvollzug und physikalische Analyse*, Zulassungsarbeit, Universität Augsburg 2006

[42] Elmer, Franz-Josef: *Nonlinear dynamics of dry friction*, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 6057–6063

[43] Gerthsen, Christian: *Gerthsen Physik*, 21. Aufl., Berlin 2002

[44] Hochadel, Oliver: *Öffentliche Wissenschaft - Elektrizität in der deutschen Aufklärung*, Göttingen 2003

[45] Tomlinson, Charles: *Note on an Experiment by Chladni*, Proceedings of the Royal Society of London, Bd. 38, S. 247-250, London 1884

[46] v. Helmholtz, Hermann: *Ueber Combinationstöne*, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 99, S. 497-540, Leipzig 1856

[47] Leine, R.I., e. a.: *Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models*, Nonlinear Dynamics, Bd. 16, Nr. 1, S. 41-54, Eindhoven 1998

[48] Müller, J. H. J., e.a.: *Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie*, Bd. 1, Braunschweig 1886

Internet

[A] http://www.netzwelt.de/lexikon/Tonh%C3%B6he.html (Stand 22.02.2007)

[B] http://www.griechische-antike.de (Stand 22.03.2007)

[C] http://www.urgeschichte.uni-tuebingen.de/fileadmin/downloads /Medien/Flute/Damals_News.pdf (Stand 30.03.2007)

[D] http://www.archaeo-technik.de/material/knochenfloete_05.pdf (Stand 25.07.2007)

[E] http://www.farhangsara.com/ibn_sina.htm (Stand 25.07.2007)

[F] http://de.wikipedia.org/wiki/Theophilus_Presbyter (Stand 25.07.2007)

[G] http://lexikon.meyers.de/meyers/Roger_von_Helmarshausen (Stand 25.07.2007)

[H] http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak /LeonardoPisa.asp (Stand 25.07.2007)

[I] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html (Stand 25.07.2007)

[J] http://www.grosseteste.com/bio.htm (Stand 25.07.2007)

[K] http://www.philosophenlexikon.de/bacon-r.htm (Stand 25.07.2007)

[L] http://www-gewi.uni-graz.at/cocoon/barch/get?pid=wissg-b-071-226 (Stand 25.07.2007)

[M] http://www.jadukids.de/personen/pers/leonardo.html (Stand 25.07.2007)

[N] http://www.phaenomen.de/deutsch/geschichte/html/ neuzeit__galilei_und_huygens.html (Stand 25.07.2007)

[O] http://members.aol.com/woinem6/html/chladni.htm (Stand 25.07.2007)

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Klangfiguren auf Stäben (links) und auf Platten (rechts)
[9], Entdeckungen, Tab.III

Abb. 2: Chladnis Euphon
[2], S. 26

Abb. 3: Chladnis Clavizylinder
Physik Journal, 5 Jahrgang, Nr. 11, 2006, S. 48

Abb. 4: Chladni vor Publikum
[2], S. 47

Abb. 5: Entartete Eigenfunktionen nach (X), wobei lx = ly = 1, i = 5 und j = 3.

Abb. 6: Zusammenstellung der Abbildungen von Klangfiguren
an quadratischen Platten aus Chladnis „Neuen Beyträgen“
[9], Neue Beyträge, Tab. I-III

Abb. 7: a) Tabellarische Darstellung der Klangfiguren und der zugehörigen Tonhöhen
b) Darstellung einiger Klangfiguren an kreisformigen Scheiben
[9], Entdeckungen, S. 46 (a)), Tab. II (b))

Abb. 8: Ordnungs-/Analyseschemata für Klangfiguren an quadratischen Platten
(a) Darstellung durch Tonhöhen und Schwingungszahlen
(b) Darstellung durch Rückführung auf Vielfache u. a. Regelmäßigkeiten
[9], Neue Beyträge, Tab. V (a)), Tab. VII (b))

Abb. 9: Regelmäßigkeiten der Schwingungszahlen und die zugehörige Tabelle

Abb. 10: Chladni führt Napoleon eine Klangfigur vor
Quelle unbekannt

Abb. 11:
Ständer zur Fixierung
und zum Anstemmen
der Platten

Abb. 12: Form- und Größenvergleich
der Aufstreumittel

Abb. 13: Erste Versuche an eingespannten Metallplatten

Abb. 14: Einige fehlerhafte und die empfohlene Bogenhaltung

Abb. 15: Grundtypen der Handhaltungen

Abb. 16: Grundfiguren. links: 1|1 rechts: L=2

Abb. 17: Figuren bei mittigem Halten.
v.l.n.r.: $\underline{2\,|\,0}$, $\underline{3\,|\,1}$, $\overline{3\,|\,1}$

Abb. 18: Freihandfiguren an runden Platten

Abb.19:
Stoffüberzogener Stift zum Anstemmen

Abb. 20: Weitere Klangfiguren auf Q1

Abb. 21: Figuren auf Q2• durch Anstemmen
l.: von Chladni nicht aufgenommen, wahrscheinlich $\overline{2 \mid 0} + \underline{5 \mid 1} \Rightarrow 7 \mid 1$
m.: leichte Variation von $4 \mid 4$
r: $\overline{6 \mid 2}$

Abb. 22: Figuren auf K2• mit Anstemmen

Abb. 23: Einfache Figuren beim Auflegen (links u. mitte: Q4, rechts Q2a)
l.: $\underline{4 \mid 0}$ m.: $\overline{4 \mid 2}$ r:: $\overline{4 \mid 0}$

Abb. 24: Figuren auf K3 und K4

Abb. 25: Komplexe Figuren auf K4

Abb. 26: Markante Figuren auf Q4

Abb. 27: Komplexe Figuren auf Q4 durch Auflegen

Abb. 28: Vorlage für die Konstruktion der Halteklammer (um 1886)
[48], S. 171

Abb. 29: Halteklammer mit Platte Q2b

Abb. 30: Dämpfungseffekte an einer Kreuzungsstelle der Figur 2|2

Abb. 31: Annäherung an 2|0

Abb. 32: Lokale Dämpfung um die
Einspannstelle herum

Abb. 33: Figuren auf Q2b (l.) und Q2a (m. & r.)

Abb. 34: Q3 an zwei Punkten eingespannt

Abb. 35: Alle erzeugbaren sternförmigen Figuren auf Q2b

Abb. 36:Normierte Leistungsspektren zweier Figurvarianten auf Q3
zwischen 6500 Hz und 9200 Hz

Ich bin damit einverstanden, dass die von mir gefertigte Hausarbeit mit dem Thema „Klangfiguren nach E. F. F. Chladni: Nachvollzug der Experimente und physikalische Analysen“ zur Einsicht durch andere Personen zur Verfügung gestellt wird. Ich habe auch keine Bedenken, dass meine Hausarbeit Interessenten ausgeliehen wird. Mir ist bekannt, dass eine Ausleihe erst 5 Jahre nach Ablauf des Kalenderjahres möglich ist, in dem mir das endgültige Ergebnis der Prüfung mitgeteilt worden ist.

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Oldenburg, den 14. April 2009

Andreas Henke