Sommersemester 09

Fehlerrechnung im Physikunterricht

Auch im Schulunterricht ist es wichtig, zu erkennen, dass Messungen grundsätzlich nicht absolut exakt sind, dass es aber Möglichkeiten gibt, anzugeben, wie sicher ein Messergebnis ist.

Zwei Annahmen stehen am Beginn jeder Arbeit mit gemessenen Größen:

- Keine Messung ist fehlerfrei,
- Wird eine Messung mehrfach wiederholt, so ist der Mittelwert der Einzelmessungen besser, als jede einzelne Messung.

Mit den folgenden Begriffen kann in der Schule gearbeitet werden:
Der wahre Wert einer Größe a kann prinzipiell durch Messung nicht bestimmt werden, denn keine Messung ist ohne Fehler.
Wird die zu bestimmende Größe mehrfach gemessen, so erhält man unterschiedliche Messergebnisse a_i. Der Mittelwert $\bar{a}$ wird dann als brauchbarer Ersatz für den wahren Wert genommen. Für den Mittelwert gilt

$\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n}$. Für jedes a_i kann man den zufälligen Fehler $\Delta a_i = a_i - \bar{a}$ angeben. Liegen nur sehr wenige Messwerte vor, etwa weniger als 10, so ist die übliche Fehlerrechnung mit den Begriffen Standardabweichung und Vertrauensbereiche, wie sie im Grundpraktikum erarbeitet wird, nicht anwendbar. Wir können aber eine für die Schule handhabbare Form eines *mittleren Fehlers* in der Form

$\bar{a} = \pm \frac{a_{max} - a_{min}}{n}$ angeben.

Dieser Wert sagt zunächst nichts über die Güte einer Messung aus. Dazu verwendet man den *relativen Fehler* $\frac{|\Delta \bar{a}|}{a}$.

Bei jedem Experiment werden mindestens zwei Größen gemessen. Für die *Fehlerfortpflanzung* gibt es folgende Regeln:
Sind die gemessenen Größen zu addieren oder zu subtrahieren, so addieren sich die Absolutwerte der mittleren Fehler.
Sind die gemessenen Größen zu multiplizieren oder zu dividieren, so werden die relativen Fehler addiert.

Neben den Fehlern, die im Vermögen des Einzelnen liegen, gibt es *systematische Fehler* , deren Ursache bei den verwendeten Geräten oder auch im Versuchsaufbau zu suchen sind.
Ausführliche Informationen zu systematischen Fehlern finden sich in „Einführung in die Fehlerrechnung und grafische Auswertung“ von Rückmann und Windzio.
Für die Schule besonders zu bedenken sind Fehler elektrischer Messinstrumente. Bei Zeigerinstrumenten wird der Fehler in Prozent des Endausschlages angegeben. Der Meßbereich ist also so zu wählen, dass möglichst im Endbereich der Skala abgelesen wird. Bei digitalen Meßinstrumenten ist stets die letzte Stelle unsicher.Hinzu kommt aber ein Fehler, der daraus resultiert, dass die Digitalisierung meistens nicht linear ist.
Systematische Fehler der Versuchsanordnung können sich bei gleichzeitiger Messung von Stromstärke und elektrischer Spannung daraus ergeben, dass die verwendeten Messinstrumente

endliche Innenwiderstände haben. Bei Versuchen zur Wärmelehre ist stets die nie ideale Isolierung der Geräte zu bedenken.
Im Unterricht kann häufig nur eine Messung durchgeführt werden. Um dann zu einer Aussage über die Genauigkeit des Ergebnisses zu kommen, wird *ein maximaler Fehler* abgeschätzt. Ein solcher Fehler kann nachvollziehbar begründet werden und dann zur Bildung von relativem Fehler und weiteren Überlegungen verwendet werden.

Nun einige Hinweise zur Praxis. Die neuen Richtlinien des Landes Niedersachsen sehen Fehlerbetrachtungen ab Klasse 8 vor.
Jugendliche reagieren irritiert, wenn sie mit den eingangs formulierten Behauptungen konfrontiert werden.
Sie erkennen den Sinn der ersten Aussage, wenn die Aufgabe lautet, die Länge einer Strecke mit einem Lineal zu messen und die Zehntelmillimeter dabei zu schätzen.
Die zweite Aussage wird durch folgendes Beispiel verdeutlicht: Die Länge einer an der Tafel gezeichneten Geraden ist zu bestimmen. Als Messinstrument steht ein in dm geteiltes „Lineal" zur Verfügung. Die Zentimeter sollen geschätzt werden. Zunächst behält jeder sein Messergebnis für sich, damit die Messungen wirklich unabhängig voneinander sind. Nach Abschluss der Messungen wird der Mittelwert berechnet und die Strecke mit einem normalen Lineal nachgemessen.

Der Sinn des relativen Fehlers wird deutlich, wenn sehr unterschiedliche Längen möglichst genau zu vermessen sind.

Dass bei der Multiplikation gemessener Größen die relativen Fehler zu addieren sind, kann auch schon in Klasse 8 am Beispiel der Messung einer Fläche verdeutlicht werden:

Die Seiten des Rechtecks seien a und b, bzw., mit Messfehler $(a+\Delta a)$ und $(b+\Delta b)$. Man erhält dann als Fläche $F = ab$ oder $F+\Delta F = (a+\Delta a)(b+\Delta b)$. Die Klammern werden zunächst ausmultipliziert. Dann wird die Differenz $F+\Delta F - F$ gebildet. ΔF ergibt sich dann als Summe dreier Summanden. Die Gleichung wird im nächsten Schritt durch F dividiert. Auf der linken Seite steht dann der relative Fehler von F. Auf der rechten Seite steht eine Summe aus drei Termen, dem relativen Fehler von a, dem relativen Fehler von b und einem Term, der im Zähler das Produkt der Fehler von a und b enthält. Dieses Produkt zweier kleiner Größen ist sehr klein. Es wird daher vernachlässigt und die Regel für die Fehlerfortpflanzung bei der Multiplikation zweier mit Fehlern behafteter Größen wird verständlich.